KALKULUS

KALKULUS

Suci Mutiara, S.Kom., M.T.I
RZ. Abdul Aziz, S.T., M.T., Ph.D
Riko Herwanto, S.Kom., M.T.I

DarmaJaya Press

KALKULUS

Penulis:
Suci Mutiara, S.Kom., M.T.I
RZ. Abdul Aziz, S.T., M.T., Ph.D
Riko Herwanto, S.Kom., M.T.I

Rancang Sampul & Penata Isi
Aura Creative

ISBN: 978-623-5867-32-8

Cetakan Maret 2024
x + 100 hlm. ; 15 x 23 cm

Penerbit
Darmajaya (DJ) Press

Sumber Gambar
https://id.wikipedia.org/wiki/Daftar_simbol_matematika
https://stock.adobe.com/images/mathematics-lesson-differential-and
-integral-calculus-chalkboard/226369452

Alamat :
Kampus IIB DARMAJAYA
Jl. Zainal Abidin Pagar Alam No 93,
Bandar Lampung 35142, INDONESIA

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.
***Bismillahirrahmanirrahim*.**

Alhamdulillah, Puji Syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya, kami dapat menyelesaikan Buku Kalkulus ini dengan baik.

Buku Kalkulus ini sengaja ditulis untuk dipergunakan sebagai acuan bagi pembaca dan mahasiswa tingkat sarjana pada Program Studi Teknik Informatika. Selain itu, di dalam buku ini diberikan permasalahan berupa contoh soal dan penyelesaian permasalahan, sehingga diharapkan dapat membantu dalam memberikan wawasan dan pemahaman yang lebih baik dari sebelumnya. Sementara dalam hal kedalaman dan ketajaman materi, penulis masih mengharapkan pembaca untuk membuka teks yang asli serta lebih banyak waktu untuk diskusi dan latihan soal.

Penulis menyampaikan banyak terimakasih kepada pihak-pihak yang berkenan memberikan kritik dan saran untuk penyempurnaan buku ajar ini pada edisi berikutnya. Semoga apa yang tertuang disini akan bisa memberikan kontribusi di lingkup **Civitas Academica Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya** dan berperan didalam Pembangunan Nasional umumnya dan sektor industri khususnya.

Bandar Lampung, 29 November 2020

Tim Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I

KONSEP DASAR KALKULUS

A. Pengertian Kalkulus

Kalkulus merupakan salah satu topik bahasan dalam matematika. Kalkulus adalah cabang matematika yang mencakup limit, turunan, integral, dan deret tak hingga (Rejeki, 2017). Limit merupakan suatu fungsi sangat penting untuk mempelajari kalkulus. Konsep tersebut digunakan dalam menjelaskan beberapa konsep terpenting dalam kalkulus yaitu kontinuitas, turunan fungsi dan integral tertentu dari suatu fungsi (V.Zandy & J.White,n.d.). Salah satu penerapan yang terpenting dari limit adalah konsep turunan atau deferensial sebuah fungsi. Sebuah fungsi terdeferensialkan jika limit ada (Varberg etal.,2004). Selain deferensial, operasi kalkulus penting yang kedua adalah antideferensial atau pengintegralan. Deferensial dan integralan merupakan operasi yang dianggap sebagai inversi satu sama lain, integral adalah balikan dari deferensiasi (V.Zandy & J.White,n.d.).

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (2015), kalkulus adalah bagian matematika yang melibatkan pengertian dan penggunaan deferensial dan integral fungsi serta konsep yang berkaitan (KBBI,2020).

Kalkulus adalah studi tentang perubahan, seperti geometri mengkaji tentang bentuk dan aljabar mengkaji tentang operasi dan aplikasinya dalam menyelesaikan persamaan. Kalkulus memiliki berbagai aplikasi dibidang sains, ekonomi, dan teknik. Selain itu, kalkulus juga dapat memecahkan berbagai masalah yang tidak dapat diselesaikan oleh aljabar dasar (LaTorreetal.,2007).

B. Prinsip-Prinsip Dasar Kalkulus

Prinsip kalkulus adalah selalu dapat menggunakan perkiraan yang lebih akurat untuk mendapatkan jawaban yang lebih akurat. Misalnya, Anda dapat membagi kurva dengan serangkaian garis lurus. Semakin pendek garis lurusnya, semakin dekat kelompok garister sebut ke kurva. Selain itu, Anda juga dapat menggunakan serangkaian kubus untuk memperkirakan volume benda bulat, dan Anda dapat menyesuaikan kubus yang lebih kecil disetiap iterasi. Dengan menggunakan kalkulus, Anda dapat menentukan hasil akhir perkiraan yang cenderung akurat, yang disebut batas.

Teorema dasar kalkulus menyatakan bahwa turunan dan integral adalah dua operasi yang berlawanan. Lebih tepatnya, teorema menghubungkan nilai anti-turunan dengan integral tertentu. Karena menghitung anti-turunan lebih mudah daripada menerapkan definisi integral tertentu, teorema dasar kalkulus menyediakan cara praktis untuk menghitung integral tertentu (LaTorreetal,2007). Teorema dasar kalkulus menyatakan:

Jika sebuah fungsi f adalah kontinu pada interval [a,b] dan jika F adalah fungsi yang mana turunannya adalah f pada interval (a,b).

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{bf(x) = dx = F(b) - (a)}$$

Untuk menghitung nilai integral, kita dapat menggunakan teorema dasar kalkulus tanpa menggunakan definisi integral tertentu sebagai batas penjumlahan Riemann. Selain itu, teorema dasar kalkulus ini dapat digunakan untuk menentukan luas dan volume sebuah bangun.

C. Bentuk-Bentuk Kalkulus

Pada umumnya kalkulus dibagi menjadi dua yaitu kalkulus I dan kalkulus II. Kalkulus I disebut kalkulus diferensial yang meliputi limit, diferensial dan aplikasi diferensial. Kalkulus diferensial adalah studi tentang laju perubahan fungsi dan variabel ketika mereka berubah.

Kalkulus diferensial menjelaskan metode laju perubahan fungsi yang disebut turunan. Turunan dalam kalkulus adalah ukuran perubahan fungsi dengan perubahan nilai input. Secara umum, turunan menggambarkan perubahan fungsi karena perubahan variabel; misalnya, turunan posisi suatu benda dalam gerakan relatif terhadap waktu adalah kecepatan sesaat benda tersebut. Fungsi akan menggambarkan sistem yang terus berubah, seperti perubahan suhu harian atau kecepatan planet disekitar bintang. Turunan dari fungsi ini akan memberikan gambaran tingkat perubahan suhu dan percepatan planet. Proses mencari turunan disebut diferensiasi.

Sedangkan kalkulus II disebut kalkulus integral yang meliputi integral tentu, integral taktentu dan penggunaan integral tentu. Secara sederhana, integral dapat didefinisikan sebagai kebalikan (*invers*) dari sebuah fungsi turunan. Adapula yang mengartikan integral sebagai suatu bentuk penjumlahan yang bersifat kontinu (berkelanjutan) yang juga merupakan bentuk anti turunan.

Integral sendiri dapat dikategorikan menjadi 2 jenis, yaitu:

1. Integral tak tentu, merupakan bentuk kebalikan dari fungsi turunan.
2. Integral tentu, yaitu limit dari luas suatu daerah tertentu.

Dengan memahami laju perubahan (fungsi) sistem, anda dapat menemukan nilai yang mewakili masukan sistem. Dengan kata lain, jika Anda mengetahui turunan seperti percepatan, Anda dapat menggunakan integral untuk mencari fungsi aslinya, yaitu kecepatan. Selain itu, kalkulus integral merupakan suatu bentuk matematika yang dapat mengidentifikasi volume, luas, dan solusi persamaan.

Dua cabang utama kalkulus, kalkulus diferensial dan kalkulus integral sangat terkait satu sama lain melalui teorema dasar kalkulus. Deferensial dan Integral merupakan operasi dasar dalam kalkulus. Contoh cabang kalkulus lainnya adalah kalkulus proposisional, kalkulus variasi, kalkulus lambda, dan kalkulus proses. Mata kuliah kalkulus adalah pintu gerbang ke matakuliah matematika tingkat lanjut lainnya yang berspesialisasi dalam fungsi dan batasan. Fungsi dan batasan ini sering disebut sebagai analisis matematika (LaTorreetal.,2007).

D. Pengembangan Kalkulus

Seiring perkembangan ilmu dan teknologi, kalkulus tidak hanya digunakan dalam bidang matematika tetapi kalkulus juga dapat digunakan disetiap cabang ilmu fisika, ilmu komputer, statistik, teknik, ekonomi, bisnis, kedokteran, demografi, dan banyak bidang lainnya. Setiap konsep dalam mekanika klasik terkait satu sama lain melalui kalkulus. Massa benda yang tidak diketahui massa jenisnya, momen inersia benda, dan energi total benda dapat ditentukan dengan menggunakan kalkulus (LaTorreetal.,2007).

Dalam subdisiplin kelistrikan dan magnet, kalkulus dapat digunakan untuk mencari flukstotal (fluks) dari medan elektromagnetik. Contoh sejarah lainnya adalah penggunaan kalkulus dalam hukum gerak Newton, yang dinyatakan dengan laju perubahan turunannya, laju perubahan momentum suatu benda sama dengan gaya resultan yang bekerja pada benda dalam arah yang sama (LaTorreetal.,2007).

Bahkan rumus umum hukum kedua Newton yang menyatakan bahwa gaya merupakan massa kali percepatan menggunakan rumus diferensial, karena percepatan dapat dinyatakan sebagai turunan kecepatan. Teori elektromagnetik Maxwell dan teori relativitas Einstein juga diungkapkan oleh kalkulus. Kalkulus memiliki beragam penerapan dalam kehidupan sehari-hari. Matematika sebagai salah satu induk ilmu pengetahuan sangat dibutuhkan dalam bidang lain.

Beberapa penerapan kalkulus dalam bidang lain antara lain:

1. Pada bidang fisika, khususnya terkait mekanika, kalkulus sangat diperlukan untuk menyelesaikan perhitungan-perhitungan dengan menerapkan konsep kalkulus.
2. Dalam bidang statistika dan teori peluang juga terdapat perhitungan dengan menerapkan konsep kalkulus (integral).
3. Dalam bidang ekonomi, kalkulus dapat digunakan untuk menentukan biaya marginal (kalkulus diferensial).

Referensi:

Anton, H., Bivens, I. C., & Davis, S. (2021). Calculus. John Wiley & Sons.

Dedy, E., Sumiaty, E., & Juandy, D. (2020). Kalkulus: Jilid 1. Bumi Aksara.

Grattan-Guinness, I. (Ed.). (2020). From the calculus to set theory 1630-1910: An introductory history. Princeton University Press.

Henra, K., Asnita, A. U., Riaddin, D., Resi, B. B. F., Setiawan, J., & Dahlan, T. (2021). Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar. Yayasan Penerbit Muhammad Zaini.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., & McCallum, W. G. (2020). Calculus: Single and multivariable. John Wiley & Sons.Anton, H., CALCULUS. A New Horizon, 6th edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1999

Kidron, I. (2020). Calculus teaching and learning. Encyclopedia of mathematics education, 87-94.

Rahmani-Andebili, M. (2023). Calculus I: Practice Problems, Methods, and Solutions. Springer Nature.

Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2021). Calculus: One and several variables. John Wiley & Sons.

BAB II

SISTEM BILANGAN

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah: Mahasiswa dapat **mengidentifikasi permasalahan dalam bentuk sistem bilangan riil.**

Bahan kajian pembelajaran pada bab ini adalah penjelasan secara komprehensif tentang **Sistem Bilangan Riil**, **Bilangan Riil**, **Selang**, **dan Pertidaksamaan**, **Nilai Mutlak**, **Akar Kuadrat**, **Kuadrat**, **Bidang Koordinat**, **Garis**, **Grafik dan Persamaan**.

Sub Capaian pembelajaran mata kuliah dalam dalam pertemuan ini adalah mahasiswa diharapkan dapat mengetahui dan memahami tentang **Sistem Bilangan Riil**, **Bilangan Riil**, **Selang**, **dan Pertidaksamaan**, **Nilai Mutlak**, **Akar Kuadrat**, **Kuadrat**, **Bidang Koordinat**, **Garis**, **Grafik dan Persamaan**.

Indikator pencapaian dalam pertemuan ini adalah mahasiswa dapat mendeskripsikan mampu menjelaskan dan mempraktekkan **Sistem Bilangan Riil, Bilangan Riil, Selang, dan Pertidaksamaan, Nilai Mutlak, Akar Kuadrat, Kuadrat, Bidang Koordinat, Garis, Grafik dan Persamaan.**

Penyampaian materi adalah dengan **ceramah, diskusi, dan praktek.**

2.1. Bilangan Riil

Bilangan riil adalah bilangan yang merupakan gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irasional. Bilangan riil yang dilengkapi dengan sifat – sifat bilangan disebut sistem bilangan riil.

1. Bilangan Asli (**N**) Sifat-sifatnya:
   a. Tertutup terhadap operasi + dan ×.
   b. Komutatif terhadap operasi + dan ×, yaitu:
   $\boldsymbol{a+b=b+a\ a\times b=b\times a}$
   c. Asosiatif terhadap operasi + dan ×, yaitu:
   $\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c}$

2. Bilangan Bulat (**Z**) Sifat-sifatnya:
   a. Tertutup terhadap operasi + dan ×.
   b. Komutatif terhadap operasi + dan ×, yaitu:
   $\boldsymbol{a+b=b+a\ a\times b=b\times a}$
   c. Asosiatif terhadap operasi + dan ×, yaitu:
   $\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c}$
   d. Elemen identitas 0 untuk +, dan elemen identitas 1 untuk ×.
   Invers + yaitu -, dan invers × yaitu
   $\boldsymbol{\frac{1}{a}, a \in Z}$.

3. Bilangan Rasional (**Q**)
   Bilangan rasional adalah sistem bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan a/b dengan a dan b adalah bilangan bulat dan b ≠ 0.

$$\boldsymbol{Q = \left\{x|x=\frac{a}{b} \text{ dengan } a,b\ \in Z\right\}}$$

   Contoh: $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{7}$ dan sebagainya

   Sifat-sifatnya:
   a. Tertutup terhadap operasi + dan ×.
   b. Komutatif terhadap operasi + dan ×, yaitu:
   $\boldsymbol{a+b=b+a}$
   $\boldsymbol{a\times b=b\times a}$
   c. Asosiatif terhadap operasi + dan ×, yaitu:
   $\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c}$
   d. Elemen identitas 0 untuk +, dan elemen identitas 1 untuk ×.

4. Bilangan Irasional (**Q**)

   Bilangan irasional adalah sistem bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan a/b namun dapat ditulis dalam bentuk decimal.

   Contoh: $\sqrt{2}$, π, $\boldsymbol{e}$, dan sebagainya.

<u>Catatan:</u>

a. **Desimal dan Bilangan Riil**

   Setiap bilangan riil dapat dinyatakan sebagai desimal tak berakhir. Desimal dari bilangan rasional dapat diperoleh dengan membagikan b pada a.

   Contoh: $\frac{2}{5} = 0,40000 \ldots$ dan $\frac{1}{3} = 0,3333 \ldots$

   Berdasarkan contoh di atas, terlihat bahwa hasil pembagiannya menghasilkan desimal yang memiliki angka berulang. Lain halnya dengan bilangan irasional, seperti:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1,73205\ldots$$
$$\pi = 3,14159\ldots$$

   Terlihat bahwa bilangan irasional menghasilkan desimal yang tak berakhir dan tidak berulang.

b. **Menyatakan Q**

   Pecahan ke desimal, contoh: $\frac{1}{4} = 0,25 \ldots$; $\frac{1}{3} = 0,33 \ldots$; dan seterusnya.

   a. Desimal ke pecahan

      1) Desimal ke pecahan terbatas, contoh

$$0,25 = 25 \times \frac{1}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

      2) Desimal ke pecahan tak terhingga

         1. Metode Euler (Mengalikan Digit yang Berulang) Aturan yang digunakan:

            a. Jika berulang 1, maka kalikan 10.

            b. Jika berulang 2, maka kalikan 100, dan seterusnya.

Contoh

$$
\begin{aligned}
x &= 0{,}121212 \quad \text{, maka:}\\
100x &= 12{,}121212\\
x &= 0{,}121212 \; -\\
\hline
99x &= 12
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

2. Deret Waktu tak Hingga

$$\mathrm{s} = \frac{a}{1-r}$$

dengan a = suku pertama dan r = rasio

Contoh: 0,121212..., maka:

$$\frac{12}{100} + \frac{12}{100^2} + \frac{12}{100^3} + \cdots$$

Sehingga

$a = \frac{12}{100}$ dan $r = \frac{1}{100}$,

akibatnya:

$$s = \frac{a}{1-r} = \frac{\left(\frac{12}{100}\right)}{1-\left(\frac{1}{100}\right)} = \frac{\left(\frac{12}{100}\right)}{\left(\frac{99}{100}\right)} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

5. Bilangan Ril (***R***)

   Sifat-sifatnya:

   a. Dapat dinyatakan dalam sebuah garis bilangan.
   b. Menentukan sifat medan/lapangan/gelanggang dalam operasi + dan ×.

   Sifat medan antara lain:

   1. Tertutup terhadap operasi + dan ×.
   2. Komutatif terhadap operasi + dan ×, yaitu:

      $\boldsymbol{a+b=b+a} \qquad \boldsymbol{a\times b=b\times a}$

3. Asosiatif terhadap operasi + dan ×, yaitu:

   $\boldsymbol{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\boldsymbol{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ $\boldsymbol{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\boldsymbol{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
4. Elemen identitas 0 untuk +, dan elemen identitas 1 untuk Invers + yaitu -, dan invers × yaitu

   $\frac{1}{a}, \boldsymbol{a} \in \mathbf{Z}$.
5. Distributif pada operasi × terhadap +. Contoh: Misalkan a, b, c $\in R$, maka:

   $\boldsymbol{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\boldsymbol{a} \times \mathbf{b}) + (\boldsymbol{a} \times \mathbf{c})$ $(\boldsymbol{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\boldsymbol{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

   Memenuhi sifat urutan.
   a. Trikotomi, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}$ maka hanya berlaku salah satu pernyataan berikut: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ atau $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ atau $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$.
   b. Transitif, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in R$ diperoleh jika $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{c}$ maka: $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{c}$
   c. *Adiktif*, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}$ *diperoleh jika* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ *maka*: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} < \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$
   d. Multiplikatif, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}$ diperoleh jika $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ maka:

      $\boldsymbol{a} \times \mathbf{c} < \boldsymbol{b} \times \mathbf{c}$, jika $\boldsymbol{c} > \mathbf{0}$

      $\boldsymbol{a} \times \mathbf{c} > \boldsymbol{b} \times \mathbf{c}$, jika $\boldsymbol{c} < \mathbf{0}$

Latihan 1:

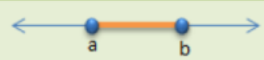
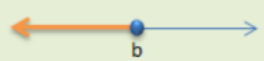
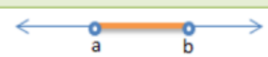
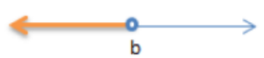
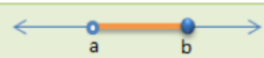
1. Sebutkan masing-masing 5 contoh bilangan dari:
   a. Kelompok bilangan prima.
   b. Kelompok bilangan komposit.
   c. Kelompok bilangan kuadrat.
2. Tentukan jenis kelompok bilangan dari himpunan bilangan berikut.
   a. {2, 4, 6, 8, 10, 12}
   b. {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17}
   c. {1, 3, 5, 7, 9}
3. Ubahlah bentuk desimal berikut ke bentuk pecahan menggunakan Metode Euler dan deret waktu tak hingga.
   a. 0,181818181818...
   b. 0,234234234234...
   c. 0,456745674567...
   d. 0,12345345345345...
   e. 0,78976547654765

4. Selesaikanlah soal operasi pada bilangan berikut = 10 − 4: 2 x 5 =
5. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\right.$
6. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$
7. Sebuah TV dibeli dengan harga Rp. 2.000.000,00, dan dijual dengan harga Rp. 2.400.000,00. Hitunglah persentase keuntungan dari harga pembelian dan dari harga penjualan!

2.2. Konsep Selang/Interval

Biasanya sebuah bentuk umum punya banyak himpunan penyelesaiannya. Kita tidak mungkin untuk menuliskan semua bilangan penyelesaiannya kan? Biasanya digunakan interval bilangan. Interval bilangan terdiri dari 3 jenis yaitu interval tertutup, interval terbuka, dan interval semi terbuka.

Tabel 2.1. Tabel Hubungan Jenis Interval Notasi Pertidaksamaan dan Garis Bilangan

Jenis Interval	Notasi Pertidaksamaan	Garis bilangan
Interval tertutup	$a \le x \le b$	
	$a \le x$	
	$x \le b$	
Interval terbuka	$a < x < b$	
	$a < x$	
	$x < b$	
Interval setengah terbuka	$a < x \le b$	
	$a \le x < b$	

Notasi yang digunakan:
1. $(a,b) = \{x|a < x < b\}$
2. $[a,b] = \{x|a \le x \le b\}$
3. $[a,b) = \{x|a \le x < b\}$
4. $[a.b) = \{x|a < x \le b\}$

5. $(a, \infty) = \{x | x > a\}$
6. $[a, \infty) = \{x | x \geq a\}$
7. $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$
8. $(-\infty, b) = \{x | x \leq b\}$
9. $(-\infty, \infty) = \{x | x \in R\}$
10. $\emptyset$ = Himpunan Kosong (tidak mempunyai anggota)

2.3. Pertidaksamaan

Pertidaksamaa sering mengandung berbagai jenis kemungkinan yang pada umumnya ditunjukkan dengan beberapa tanda matematika seperti <, >, ≤, dan ≥. Pangkat tertinggi pada bentuk ini biasanya maksimal 1.

Sifat Pertidaksamaan

a. Tanda pertidaksamaan tidak berubah jika kedua ruas ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama.

   Jika a < b maka:
   a + c < b + c
   a − c < b − c

b. Tanda pertidaksamaan tidak berubah jika kedua ruas dikali atau dibagi dengan bilangan positif yang sama.

   Jika a < b, dan c adalah bilangan positif, maka:
   a.c < b.c
   a/b < b/c

c. Tanda pertidaksamaan akan berubah jika kedua ruas pertidaksamaan dikali atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama.

   Jika a < b, dan c adalah bilangan negatif, maka:
   a.c > b.c
   a/c > b/c

d. Tanda pertidaksamaan tidak berubah jika kedua ruas positif masing-masing dikuadratkan.

   Jika a < b; a dan b sama-sama positif, maka: $a^2 < b^2$ konsep yang digunakan:

   1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
   2. $a < b$ dan $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

3. $a < b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ dan $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
5. $0 < a < \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
6. $Ax^2+Bx+C > 0$
7. $Ax^2+Bx+C < 0$
8. $Ax^2+Bx+C \geq 0$
9. $Ax^2+Bx+C \leq 0$
10. $|F(x)| < a$ dan $a > 0$, maka $-a < F(x) < a$
11. $|F(x)| > a$ dan $a > 0$, maka $F(x) < -a$ atau $F(x) > a$
12. $a < |F(x)| < b$ maka $a < F(x) < b$ atau $-b < F(x) < -a$
13. $|F(x)| > |G(x)|$ maka $(F(x)+G(x))(F(x)-G(x)) > 0$

Pertidaksamaan Linear

→Variabelnya berpangkat 1

Penyelesaian:

Suku-suku yang mengandung variabel dikumpulkan di ruas kiri, dan konstanta diletakkan di ruas kanan.

Contoh:

$$\frac{x-2}{3} + \frac{2x-1}{2} < x + 4$$

Semua dikalikan 6:

$2(x - 2) + 3(2x - 1) < 6(x + 4)$

$2x - 4 + 6x - 3 < 6x + 24$

$2x + 6x - 6x < 24 + 4 + 3$

$2x < 31$

$$x < \frac{31}{2}$$

Pertidaksamaan Kuadrat

→ Variabelnya berpangkat 2

Penyelesaian:

1. Ruas kanan dibuat menjadi nol
2. Faktorkan
3. Tentukan harga nol, yaitu nilai variabel yang menyebabkan nilai faktor sama dengan nol

4. Gambar garis bilangannya
   a. Jika tanda pertidaksamaan ≥ atau ≤, maka harga nol ditandai dengan titik hitam •
   b. Jika tanda pertidaksamaan > atau <, maka harga nol ditandai dengan titik putih °
5. Tentukan tanda (+) atau (−) pada masing-masing interval di garis bilangan. Caranya adalah dengan memasukkan salah satu bilangan pada interval tersebut pada persamaan di ruas kiri.
   Tanda pada garis bilangan berselang-seling, kecuali jika ada batas rangkap (harga nol yang muncul 2 kali atau sebanyak bilangan genap untuk pertidaksamaan tingkat tinggi), batas rangkap tidak merubah tanda
6. Tentukan himpunan penyelesaian
   → jika tanda pertidaksamaan > 0 berarti daerah pada garis bilangan yang diarsir adalah yang bertanda (+)
   → jika tanda pertidaksamaan < 0 berarti daerah pada garis bilangan yang diarsir adalah yang bertanda (−)

Contoh:

$(2x - 1)^2 \geq (5x - 3).(x - 1) - 7$

$4x^2 - 4x + 1 \geq 5x^2 - 5x - 3x + 3 - 7$

$4x^2 - 4x + 1 - 5x^2 + 5x + 3x - 3 + 7 \geq 0$

$-x^2 + 4x + 5 \geq 0$

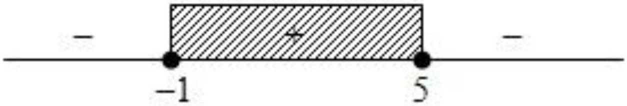
$-(x^2 - 4x - 5) \geq 0$

$-(x - 5).(x + 1) \geq 0$

Harga nol: $x - 5 = 0$ atau $x + 1 = 0$

$x = 5$ atau $x = -1$

Garis bilangan:



Gambar 1.1. Garis Bilangan x = 5 atau x =1

1) menggunakan titik hitam karena tanda pertidaksamaan ≥
2) jika dimasukkan x = 0 hasilnya positif
3) karena 0 berada di antara −1 dan 5, maka daerah tersebut bernilai positif, di kiri dan kanannya bernilai negative
4) karena tanda pertidaksamaan ≥ 0, maka yang diarsir adalah yang positif

   Jadi penyelesaiannya: $\{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$

Pertidaksamaan Tingkat Tinggi

→ Variabel berpangkat lebih dari 2

Penyelesaian sama dengan pertidaksamaan kuadrat

Contoh:

$(2x + 1)^2.(x^2 - 5x + 6) < 0$

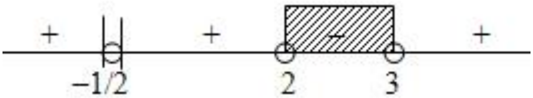
$(2x + 1)^2.(x - 2).(x - 3) < 0$

Harga nol: $2x + 1 = 0$ atau $x - 2 = 0$ atau $x - 3 = 0$

$x = -1/2$ atau $x = 2$ atau $x = 3$

Garis bilangan:

1) menggunakan titik putih karena tanda pertidaksamaan <
2) jika dimasukkan x = 0 hasilnya positif
3) karena 0 berada di antara −1/2 dan 2, maka daerah tersebut bernilai positif
4) karena −1/2 adalah batas rangkap (−1/2 muncul sebanyak 2 kali sebagai harga nol, jadi −1/2 merupakan batas rangkap), maka di sebelah kiri −1/2 juga bernilai positif
5) selain daerah yang dibatasi oleh batas rangkap, tanda positif dan negatif berselang-seling
6) karena tanda pertidaksamaan ³ 0, maka yang diarsir adalah yang positif



Gambar 1.2. Garis Bilangan {x 2 < x < 3}

Jadi penyelesaiannya: $\{x \mid 2 < x < 3\}$

Pertidaksamaan Pecahan

→ ada pembilang dan penyebut

Penyelesaian:

1. Ruas kanan dijadikan nol
2. Samakan penyebut di ruas kiri
3. Faktorkan pembilang dan penyebut (jika bisa)
4. Cari nilai-nilai variabel yang menyebabkan pembilang dan penyebutnya sama dengan nol (harga nol untuk pembilang dan penyebut)
5. Gambar garis bilangan yang memuat semua nilai yang didapatkan pada langkah 4
6. Apapun tanda pertidaksamaannya, harga nol untuk penyebut selalu digambar dengan titik putih (penyebut suatu pecahan tidak boleh sama dengan 0 agar pecahan tersebut mempunyai nilai)
7. Tentukan tanda (+) atau (−) pada masing-masing interval

Contoh 1:

$$\frac{2x-1}{x-3} \geq 7$$

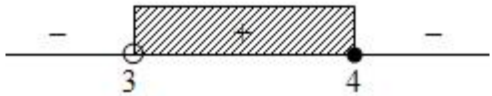
$$\frac{2x-1}{x-3} - 7 \geq 0$$

$$\frac{2x-1-7(x-3)}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{2x-1-7x+21}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{-5x+20}{x-3} \geq 0$$

1) Harga nol pembilang: $-5x + 20 = 0$
2) $-5x = -20 \rightarrow x = 4$
3) Harga nol penyebut: $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$
4) Garis bilangan:
5) → $x = 3$ digambar menggunakan titik putih karena merupakan harga nol untuk penyebut



Gambar 1.3. Garis Bilangan {x 3 < x ≤ 4 }

Jadi penyelesaiannya: {x | 3 < x ≤ 4}

Contoh 2:

$$\frac{-x^2+x+2}{x^2+x+1} \leq 0$$

$$\frac{-(x^2-x-2)}{x^2+x+1} \leq 0$$

$$\frac{-(x-2)(x+1)}{x^2+x+1} \leq 0$$

Harga nol pembilang: x − 2 = 0 atau x + 1 = 0

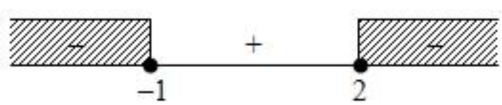
x = 2 atau x = −1

Harga nol penyebut: tidak ada, karena penyebut tidak dapat difaktorkan dan jika dihitung nilai diskriminannya:

$D = b^2 - 4.a.c = 1^2 - 4.1.1 = 1 - 4 = -3$

Nilai D-nya negatif, sehingga persamaan tersebut tidak mempunyai akar riil (Catatan: jika nilai D-nya tidak negatif, gunakan rumus abc untuk mendapat harga nol-nya)

Garis bilangan:



Jadi penyelesaiannya: {x | x ≤ −1 atau x ≥ 2}

Pertidaksamaan Irasional/Pertidaksamaan Bentuk Akar

→ variabelnya berada dalam tanda akar

Penyelesaian:

1. Kuadratkan kedua ruas
2. Jadikan ruas kanan sama dengan nol
3. Selesaikan seperti menyelesaikan pertidaksamaan linear/kuadrat
4. Syarat tambahan: yang berada di dalam setiap tanda akar harus ≥ 0

Contoh 1:

$\sqrt{x^2 - 5x - 6} < \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

1) Kuadratkan kedua ruas:

   $x^2 - 5x - 6 < x^2 - 3x + 2$

   $x^2 - 5x - 6 - x^2 + 3x - 2 < 0$

   $-2x - 8 < 0$

2) Semua dikali −1:

   $2x + 8 > 0$

   $2x > -8$

   $x > -4$

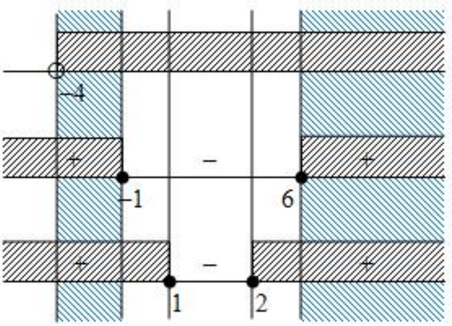
Syarat 1:

1) $x^2 - 5x - 6 \geq 0$
2) $(x - 6).(x + 1) \geq 0$
3) Harga nol: $x - 6 = 0$ atau $x + 1 = 0$
4) $x = 6$ atau $x = -1$

Syarat 2:

1) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
2) $(x - 2).(x - 1) \geq 0$
3) Harga nol: $x - 2 = 0$ atau $x - 1 = 0$
4) $x = 2$ atau $x = 1$

Garis bilangan:



Jadi penyelesaiannya: $\{x \mid -4 < x \leq -1 \text{ atau } x \geq 6\}$

Contoh 2:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 8} < x - 2$$

Kuadratkan kedua ruas:

$x^2 - 6x + 8 < x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 6x + 8 - x^2 + 4x - 4 < 0$

$-2x + 4 < 0$

$-2x < -4$

Semua dikalikan −1

$2x > 4$

$x > 2$

Syarat:

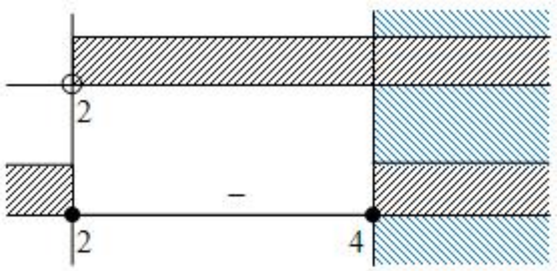
$x^2 - 6x + 8 \geq 0$

$(x - 4).(x - 2) \geq 0$

Harga nol: $x - 4 = 0$ atau $x - 2 = 0$

$x = 4$ atau $x = 2$

Garis bilangan:



Jadi penyelesaiannya: $\{x \mid x \geq 4\}$

Pertidaksamaan Nilai Mutlak

→ variabelnya berada di dalam tanda mutlak | ….. |

(tanda mutlak selalu menghasilkan hasil yang positif, contoh: $|3| = 3$; $|-3| = 3$)

Pengertian nilai mutlak:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ jika } x \geq 0 \\ -x, \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Penyelesaian:

Jika $|x| < a$ berarti: $-a < x < a$, dimana $a \geq 0$

Jika $|x| > a$ berarti: $x < -a$ atau $x > a$, dimana $a \geq 0$

Contoh 1:

$|2x - 3| \leq 5$

berarti:

$-5 \leq 2x - 3 \leq 5$

$-5 + 3 \leq 2x \leq 5 + 3$

$-2 \leq 2x \leq 8$

Semua dibagi 2:

$-1 \leq x \leq 4$

Contoh 2:

$|3x + 7| > 2$

berarti:

$3x + 7 < -2$ atau $3x + 7 > 2$

$3x < -2 - 7$ atau $3x > 2 - 7$

$x < -3$ atau $x > -5/3$

Contoh 3:

$|2x - 5| < |x + 4|$

Kedua ruas dikuadratkan:

$(2x - 5)^2 < (x + 4)^2$

$(2x - 5)^2 - (x + 4)^2 < 0$

$(2x - 5 + x + 4).(2x - 5 - x - 4) < 0$ (*Ingat!* $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$)

$(3x - 1).(x - 9) < 0$

Harga nol: $3x - 1 = 0$ atau $x - 9 = 0$

$x = 1/3$ atau $x = 9$

Garis bilangan:

Jadi penyelesaiannya: $\{x \mid 1/3 < x < 4\}$

Contoh 4:

$$|4x - 3| \geq x + 1$$

Kedua ruas dikuadratkan:

$$(4x - 3)^2 \geq (x + 1)^2$$
$$(4x - 3)^2 - (x + 1)^2 \geq 0$$
$$(4x - 3 + x + 1).(4x - 3 - x - 1) \geq 0$$
$$(5x - 2).(3x - 4) \geq 0$$

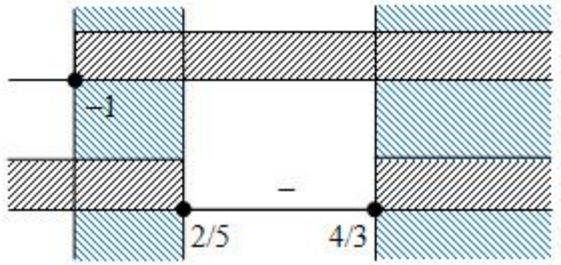
Harga nol: $5x - 2 = 0$ atau $3x - 4 = 0$

$x = 2/5$ atau $x = 4/3$

Syarat:

$$x + 1 \geq 0$$
$$x \geq -1$$

Garis bilangan:



Jadi penyelesaiannya: $\{x \mid -1 \leq x \leq 2/5 \text{ atau } x \geq 4/3\}$

Contoh 5:

$$|x - 2|^2 - |x - 2| < 2$$

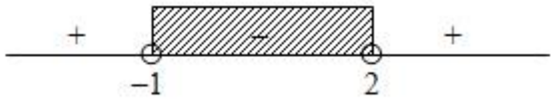
Misalkan $|x - 2| = y$

$$y^2 - y < 2$$
$$y^2 - y - 2 < 0$$
$$(y - 2).(y + 1) < 0$$

Harga nol: $y - 2 = 0$ atau $y + 1 = 0$

$y = 2$ atau $y = -1$

Garis bilangan:



Artinya:

$-1 < y < 2$

$-1 < |x - 2| < 2$

Karena nilai mutlak pasti bernilai positif, maka batas kiri tidak berlaku

$|x - 2| < 2$

Sehingga:

$-2 < x - 2 < 2$

$-2 + 2 < x < 2 + 2$

$0 < x < 4$

Latihan 2

Selesaikanlah soal-soal pertidaksamaan berikut ini.

1) $-2x^2 - 5x + 3 \leq 0$
2) $x^3 - 4x^2 < 0$
3) $x^2 (x^2 + 6x + 9) > -(x^2 + 6x + 9)$
4) $x^2 (x - 1) \geq (x - 1)$
5) $\sqrt{x^2 - 6x + 8} < \sqrt{x + 2}$
6) $\sqrt{1 - x^2} < \sqrt{4x + 5}$
7) $\frac{(5x+1)(x+1)}{(2x+4)} \leq \frac{(x+1)}{(2x+4)}$
8) $\frac{(x^2-9)(x^2+4)}{(1-x^2)} \geq (2x + 4)$

2.4. Nilai/Harga Mutlak

Nilai/harga mutlak sebuah bilangan $\boldsymbol{a}$, dinyatakan dengan $|\boldsymbol{a}|$ adalah jarak dari $\boldsymbol{a}$ ke **O** pada garis bilangan riil. Jarak selalu bernilai positif atau **0**, sehingga dapat dinotasikan bahwa:

$$|\boldsymbol{a}| \geq \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x}$$

Nilai/harga mutlak dari a didefinisikan sebagai:

$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a}, \textbf{jika } \boldsymbol{a} \geq \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{a}, \textbf{jika } \boldsymbol{a} < \mathbf{0} \end{cases}$$

Adapun sifat-sifat dari nilai/harga mutlak adalah sebagai berikut: Misalkan a dan b adalah bilangan riil sembarang dan n bilangan bulat, maka:

1. $\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}|$
2. $|\boldsymbol{ab}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$
3. $\left|\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$
4. $|\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}| = |\boldsymbol{a}|^{\boldsymbol{n}}$
5. $|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{x} = \pm\boldsymbol{a}$ **dengan** $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$
6. $|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{a} \leftrightarrow -\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}$ **dengan** $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$
7. $|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{a} \leftrightarrow -\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}$ **dengan** $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$
8. $|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{a} \leftrightarrow (\boldsymbol{x} > \boldsymbol{a})\mathbf{V}(\boldsymbol{x} < -\boldsymbol{a})$ **dengan** $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$
9. $|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{a} \leftrightarrow (\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a})\mathbf{V}(\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{a})$ **dengan** $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$
10. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

Langkah-langkah menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak

Pertidaksamaan nilai mutlak ialah jenis pertidaksamaan yang mengandung nilai mutlak didalamnya. Nilai mutlak menghitung jarak pada suatu angka dari **0** misalnya, ***|x|*** mengukur jarak ***x*** dari **0**. Pertidaksamaan nilai mutlak bisa ditemukan dan di terapkan dalam simetri, batas-batas simetris, ataupun kondisi batas. Pahami dan selesaikan jenis-jenis pertidaksamaan ini dengan beberapa langkah yang sederhana, baik dengan cara evaluasi ataupun transformasi.

Langkah 1

Evaluasi pada bentuk pertidaksamaan nilai mutlak. Seperti yang sudah disebutkan di atas, nilai mutlak ***x***, yang dinotasikan dengan ***|x|***, didefinisikan sebagai berikut:
Pertidaksamaan nilai mutlak umumnya mempunyai salah satu bentuk berikut:

|x|* < *a atau ***|x|> a***; ***|x±a|* <** b ataupun ***|x±a|* > *b*; *|ax2+bx|* < c**, Fokusnya ialah pertidaksamaan dengan bentuk $|f(x)| < a$ maupun $|f(x)| > a$, dengan $f(x)$ berupa fungsi apapun dan **a** ialah kosntanta.

Langkah 2

Mengubah terlebih dahulu pertidaksamaan nilai mutlak hingga menjadi pertidaksamaan biasa. Ingat bahwa nilai mutlak dari **x** bisa bernilai **x** positif ataupun **x** negatif. Pertidaksamaan nilai mutlak $|x| < 3$ juga bisa dirubah jadi dua pertidaksamaan: $-x < 3$ ***dan*** $x < 3$.

Contoh,
$|x-3| > 5$ bisa dirubah jadi $-(x-3) > 5$ ataupun $x-3 > 5$.
$|3x+2| < 5$ bisa dirubah jadi $-(3x+2) < 5$ ataupun $3x+2 < 5$.

Istilah "atau" diatas memiliki arti bahwa kedua pertidaksamaan itu memenuhi persyaratan soal nilai mutlak.

Langkah 3

Abaikan saja tanda pertidaksamaan ketika mencari nilai x untuk persamaan yang pertama. Jika membantu, ubah saja tanda pertidaksamaan jadi tanda sama dengan hingga bagian akhir hanya untuk sementara.

Langkah 4

Cari nilai **x** seperti yang biasanya di lakukan. Ingat bahwa jika membagi dengan angka negatif untuk menyendirikan **x** ke salah satu sisi dari tanda pertidaksamaan, harus membalik tanda pertidaksamaannya. contohmya, jika membagi kedua sisi dengan **-1**, $-x > 5$ bisa menjadi $x < -5$.

Langkah 5

Tulis himpunan penyelesaian. Dari nilai di atas, perlu menulis jangkauan nilai yang bisa disubstitusikan ke **x**. Jangkauan nilai ini sering juga disebut sebagai himpunan penyelesaian. Karena harus menyelesaikan dua pertidaksamaan dari pertidaksamaan nilai mutlak tersebut, maka akan mempunyai dua penyelesaian.

Pada contoh yang dipakai di atas, penyelesaiannya bisa ditulis dengan dua cara yaitu:

$-7/3 < x < 1$ $(-7/3, 1)$

Contoh soal:

Tentukan interval pada penyelesaian pertidaksamaan berikut:

$$|x+2| > 2|x-1|$$

Maka:

$|x+2| > 2|x-1|$

$(x+2)^2 > 4(x-1)^2$

$x^2 + 4x + 4 > 4(x^2 - 2x + 1)$

$x^2 + 4x + 4 > 4x^2 - 8x + 4$

$3x^2 - 12x < 0$

$3x(x-4) < 0$

$x_1 = 0$ dan $x_2 = 4$

jadi $0 < x < 4$

L**atihan 3:**

Selesaikanlah soal-soal pertidaksamaan pada nilai/harga mutlak berikut ini.

1. $|x+4| = 8$
2. $|2x-10| = 6$
3. $|2x+4| \leq 6$
4. $\left|\frac{3x}{5} + 1\right| < 4$
5. $|5x-15| > 2$
6. $|7x+2| \geq 5$
7. $|2x-2| < |x-5|$
8. $|4x-2| < 2|x-5|$
9. $|4x-2| + |x-5| < 10$
10. $|3x-3| + |x+2| \geq 1$

2.5. Kesimpulan

1. Bilangan riil adalah bilangan yang merupakan gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irasional.
2. Bilangan riil yang dilengkapi dengan sifat – sifat bilangan disebut sistem bilangan riil.

3. Bilangan rasional adalah sistem bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan a/b dengan a dan b adalah bilangan bulat dan b ≠ 0
4. Bilangan irasional adalah sistem bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan a/b namun dapat ditulis dalam bentuk desimal
5. Pertidaksamaa sering mengandung berbagai jenis kemungkinan yang ditunjukkan dengan tanda <, >, ≤, dan ≥.

TUGAS DAN LATIHAN

Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti.

1) Ubahlah bentuk desimal berikut ini ke bentuk pecahan menggunakan Metode Euler dan Deret Waktu tak Hingga.
   a) 0,452452452452452...
   b) 0,982349823498234...
   c) 0,3249249249249249...
   d) 0,99345345345345345...
   e) 0,2345325632563256...

2) Selesaikanlah pertidaksamaan berikut ini.
   a) $x^3 + 8x^2 + 15x \leq 0$
   b) $x^2 (x + 3) < (x + 3)$
   c) $(x^2 + 4)(x^2 - 9) > 0$
   d) $\sqrt{x^2 - 10x + 21} \geq \sqrt{2x + 11}$
   e) $\frac{(8x+3)(x-2)}{4x+5} \geq \frac{x(x-2)}{4x+5}$

3) Selesaikanlah pertidaksamaan nilai mutlak berikut ini.
   a) $\left|\frac{2}{5} x - 3\right| < 5$
   b) $\left|4x - \frac{1}{2}\right| \leq 5$
   c) $|5x + 2| - 3|x - 4| > 0$
   d) $|x + 8| + |x - 3| \geq 5$
   e) $|x + 2| - |3x - 18| \leq 0$

Referensi:

Dedy, E., Sumiaty, E., & Juandy, D. (2020). Kalkulus: Jilid 1. Bumi Aksara.

Hakim, A. R., & Mulyatna, F. (2023). Sejarah Matematika: Perkembangan Bilangan Matematika Empiris. Diskusi Panel Nasional Pendidikan Matematika, 9.

Henra, K., Asnita, A. U., Riaddin, D., Resi, B. B. F., Setiawan, J., & Dahlan, T. (2021). Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar. Yayasan Penerbit Muhammad Zaini.

Novika, F. (2023). KALKULUS DASAR. Penerbit Tahta Media.

BAB III

FUNGSI DAN MODEL

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah: Mahasiswa mampu memahami dan menyelesaikan fungsi dan operasi-opersi yang berkaitan dengan fungsi.

Bahan kajian pembelajaran pada bab ini adalah penjelasan secara komprehensif tentang **Fungsi, Operasi-Operasi Pada Fungsi, Grafik Fungsi.**

Sub Capaian pembelajaran mata kuliah dalam dalam pertemuan ini adalah mahasiswa diharapkan dapat mengetahui dan memahami tentang **Fungsi, melakukan Operasi-Operasi Pada Fungsi, membuat Grafik Fungsi.**

Indikator pencapaian dalam pertemuan ini adalah mahasiswa dapat mendeskripsikan mampu menjelaskan dan mempraktekkan **Fungsi, melakukan Operasi-Operasi Pada Fungsi, membuat Grafik Fungsi.**

Penyampaian materi adalah dengan **ceramah, diskusi, dan praktek**

3.1. Fungsi

Definisi Fungsi

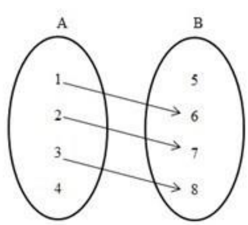
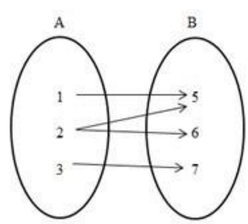
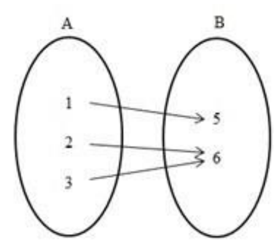
Fungsi f didefinisikan sebagai aturan yang memadankan setiap elemen x dalam himpunan A secara tepat satu elemen, yang disebut $f(x)$ dalam himpunan **B**.

Pengertian Fungsi: Relasi dari himpunan **A** ke himpunan **B** disebut fungsi atau pemetaan jika dan hanya jika setiap anggota himpunan **A** berpasangan dengan tepat satu anggota himpunan **B**.

Suatu fungsi atau pemetaan dapat disajikan dalam bentuk himpunan pasangan terurut, rumus, diagram panah, atau diagram cartesius. Fungsi f yang memetakan himpunan **A** ke himpunan **B** ditulis dengan notasi: $f: A \rightarrow B$.

Himpunan x disebut daerah asal fungsi atau domain ***f*** (***dom f***) dan **Y** disebut daerah kawan atau daerah hasil fungsi atau kodomain (***kod f***). Jika $x \in X$, maka $y \in Y$ yang berelasi dengan elemen x disebut bayangan (atau peta) dari x oleh f, atau nilai dari fungsi f di x dan dilambangkan dengan $y=f(x)$. Jadi jika b adalah bayangan a oleh f ditulis $b=f(a)$ atau dengan kata lain nilai dari fungsi f di a adalah $f(a)=b$. Adapaun range (daerah hasil) dari f adalah himpunan bagian dari himpunan **Y** yang merupakan bayangan dari setiap anggota di himpuana **X** oleh f. Jadi dapat dituliskan dengan, rangge $(f)=\{y \in Y : y=f(x)\ \forall x \in X\}$. Dalam istilah lain, $x \in X$ disebut variabel bebas dan $y \in Y$ disebut variabel tak bebas.

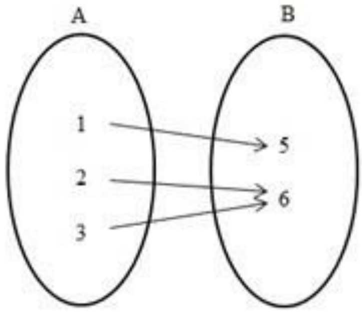
Tabel 3.1. Penggambaran Pemetaan Fungsi

Contoh 1	**Contoh 2**	**Contoh 3**
		
Bukan fungsi karena terdapat anggota di **A** yang tidak dihubungkan dengan anggota di **B**	Bukan fungsi karena terdapat anggota di **A** yang dihubungkan lebih dari satu dengan anggota di **B**	Merupakan fungsi karena setiap anggota di **A** tapat dihubungkan dengan satu anggota di **B**

Sifat-sifat Fungsi

1. **Fungsi Surjektif**

   Pada fungsi $f: A \to B$, jika setiap elemen di B mempunyai pasangan di A atau R_f=B, atau setiap $y \in Y$ terdapat $x \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Contoh:

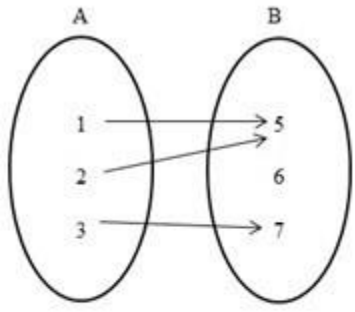


Gambar 3.1. Himpunan Fungsi Surjektif

2. **Fungsi Into**

   Pada fungsi $f: A \to B$, jika terdapat elemen di B yang tidak mempunyai pasangan di A.

   Contoh:

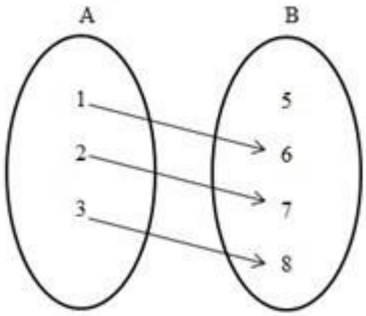


Gambar 3.2. Himpunan Fungsi Into

3. **Fungsi Injektif**

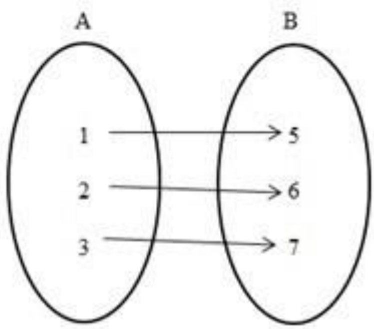
   Pada fungsi $f: A \to B$, jika setiap elemen di B mempunyai pasangan tepat satu elemen dari A.

Contoh:



Gambar 3.3. Himpunan Fungsi Injektif

4. **Fungsi Bijektif**
   Jika fungsi $f: A \to B$ merupakan fungsi surjektif sekaligus fungsi injektif.
   Contoh:



Gambar 3.4. Himpunan Fungsi Bijektif

Fungsi Komposisi

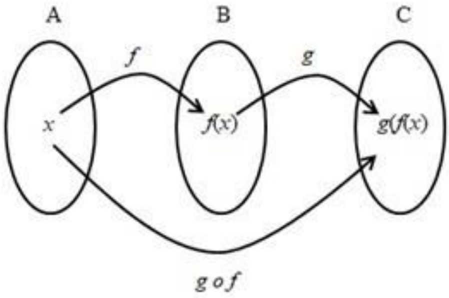
Fungsi komposisi merupakan susunan dari beberapa fungsi yang terhubung dan bekerja sama.

Sebagai ilustrasi jika fungsi ***f*** dan ***g*** adalah mesin yang bekerja beriringan. Fungsi ***f*** menerima input berupa **(x)** yang akan diolah di mesin ***f*** dan menghasilkan output berupa $f(x)$. Kemudian $f(x)$ dijadikan input untuk diproses di mesin g sehingga didapat output berupa $g(f(x))$

Ilustrasi tersebut jika dibuat dalam fungsi merupakan komposisi ***g*** dan ***f*** yang dinyatakan dengan gof sehingga:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

dengan syarat: $R_f \cap D_g \neq \emptyset$.



Gambar 3.5. Himpunan Pemetaan Fungsi

Komposisi bisa lebih dari dua fungsi jika $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, dan $h: C \rightarrow D$, maka $hogof: A \rightarrow D$ dan dinyatakan dengan:

$$(hogof)(x) = h(g(f(x)))$$

Sifat-sifat fungsi komposisi:

a. Operasi pada fungsi komposisi tidak besifat komutatif
   $(gof)(x) \neq (fog)(x)$
b. Operasi bersifat asosiatif:
   $(hogof)(x) = \big(ho(gof)\big)(x) = ((hog)of)(x)$

Contoh:

Jika $f(x) = 2x + 3$ dan $(fog)(x) = 2x^2 + 6x - 7$, maka g(x) adalah

$$(f)\big(g(x)\big) = 2x^2 + 6x - 7$$

$$2\big(g(x)\big) + 3 = 2x^2 + 6x - 7$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 5$$

3.2. Grafik Fungsi

Grafik fungsi adalah grafik yang menunjukkan hubungan antara setiap nilai x dengan bayangannya (y) pada suatu fungsi f.

A. Grafik Fungsi Linear

Fungsi linear adalah fungsi dengan pangkat variabel tertinggi 1, dengan bentuk umum

$$\boldsymbol{f(x) = ax + b}$$

Sehingga grafiknya akan berbentuk **garis lurus** dengan persamaan $\boldsymbol{y = ax + b}$ dengan gradien $\boldsymbol{a}$ dan konstanta $\boldsymbol{b}$ (ordinat ketika garis memotong sumbu y.

Contoh

Diketahui suatu fungsi linear $f(x) = 2x - 3$

Langkah pertama untuk menggambar grafik fungsi pada koordinat kartesius adalah dengan membuat tabel (x, $f(x)$) sebagai berikut

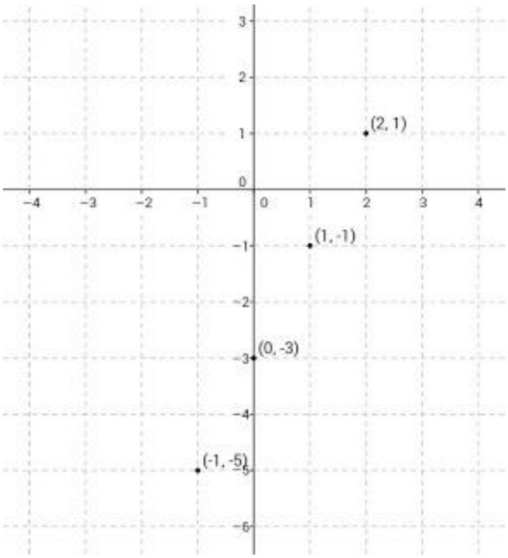
$f(-1) = 2(-1) - 3 = -5$ $\quad$ $f(1) = 2(1) - 3 = -1$

$f(0) = 2(0) - 3 = -3$ $\quad$ $f(2) = 2(2) - 3 = 1$

Tabel 3.2. Contoh Tabel Sebaran Fungsi Linier

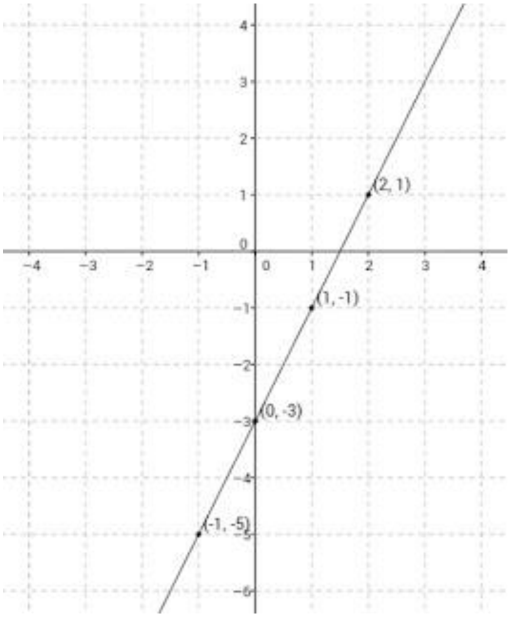
x	-1	0	1	2
f(x)	-5	-3	-1	1

Lalu, masukkan titik (-1,-5), (0,-3), (1,-1), dan (2,1) pada koordinat kartesius sebagai berikut



Gambar 3.6. Input Fungsi Linear–Sistem Koordinat Kartesian

Kemudian, hubungkan titik-titik tersebut dalam satu garis lurus sebagai berikut



Gambar 3.7. Grafik Hasil Fungsi Linear

Inilah grafik fungsi linear $\boldsymbol{f(x) = 2x - 3}$.

B. Grafik Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah suatu persamaan dari variabel yang mempunyai pangkat tertinggi dua. Fungsi ini berkaitan dengan PERSAMAAN KUADRAT. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sedangkan bentuk umum dari fungsi kuadrat adalah:

$$f(x) = ax^2 + br + c$$

Dengan ***a***, ***b***, merupakan koefisien, dan **c** adalah konstanta, serta a≠0.

Fungsi kuadrat ***f*(x)** dapat juga ditulis dalam bentuk **y** atau:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Dengan **x** adalah variable bebas dan **y** adalah variable terikat. Sehingga nilai **y** tergantung pada nilai **x**, dan nilai-nilai **x** tergantung pada area yang ditetapkan. Nilai **y** diperoleh dengan memasukan nilai-nilai **x** kedalam fungsi.

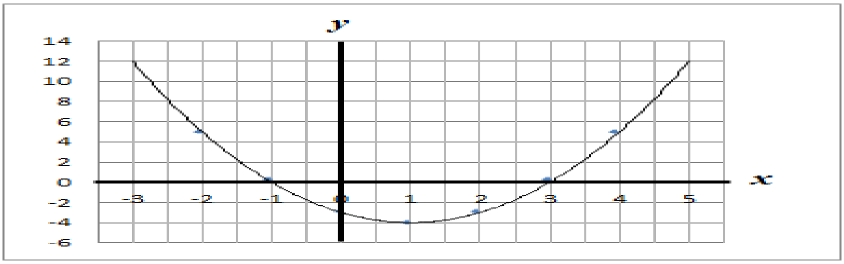
Grafik Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dapat digambarkan ke dalam koordinat kartesius sehingga diperoleh suatu grafik fungsi kuadrat. Sumbu x adalah domain dan sumbu y adalah kodomain. Grafik dari fungsi kuadrat berbentuk seperti parabola sehingga sering disebut grafik parabola.

Grafik dapat dibuat dengan memasukan nilai x pada interval tertentu sehingga didapat nilai y. Kemudian pasangan nilai (x, y) tersebut menjadi koordinat dari yang dilewati suatu grafik. Sebagai contoh, grafik dari fungsi: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ adalah:

Koordinat								
	x	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Gambar 3.8. Tabel Hasil Koordinat Fungsi



Gambar 3.9. Grafik Hasil Koordinat Fungsi

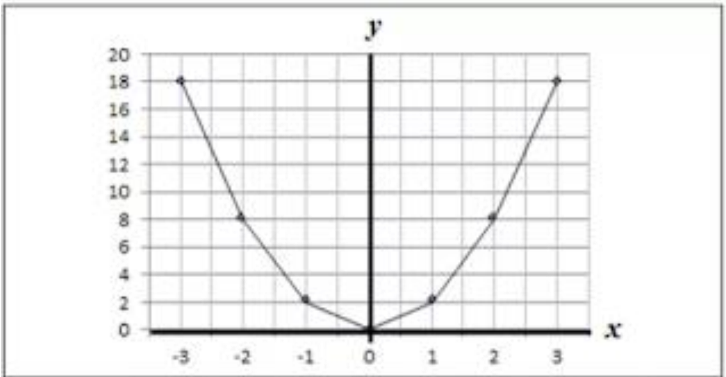
Jenis grafik fungsi kuadrat lain

1. Grafik fungsi $y = ax^2$

   Jika pada fungsi $y = ax2 + bx + c$ memiliki nilai b dan c sama dengan nol, maka fungsi kuadratnya:

   $$y = ax^2$$

   Pada grafik fungsi ini akan selalu memiliki garis simetris pada x = 0 dan titik puncak y = 0. Sebagai contoh $f(x) = 2x^2$, maka grafiknya adalah:



koordinat								
	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	18	8	2	0	2	8	18

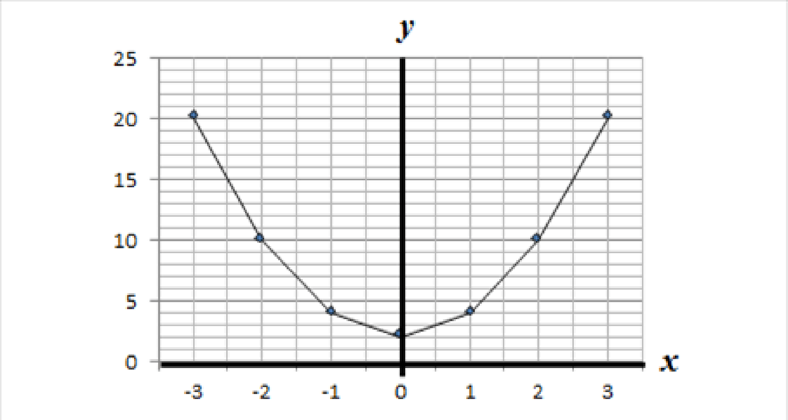
Gambar 3.10. Hasil fungsi f(x) = 2x

2. Grafik fungsi $y = ax^2 + c$

   Jika pada fungsi $y = ax^2 + bx + c$ memiliki nilai b = 0, maka fungsi kuadratnya sama dengan:

   $$y = ax^2 + c$$

Pada fungsi ini grafik akan memiliki kesamaan dengan grafik fungsi kuadrat $y = ax^2$ yaitu selalu memiliki garis simetris pada x = 0. Namun, titik puncaknya sama dengan nilai c atau $Y_{puncak} = c$. Sebagai contoh = $2x^2 + 2$, maka grafiknya adalah:



koordinat	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	20	10	4	2	4	10	10

Gambar 3.11. Grafik Fungsi 2x + 2

3. Grafik fungsi $y = a\,(x \,\square h)^2 + k$

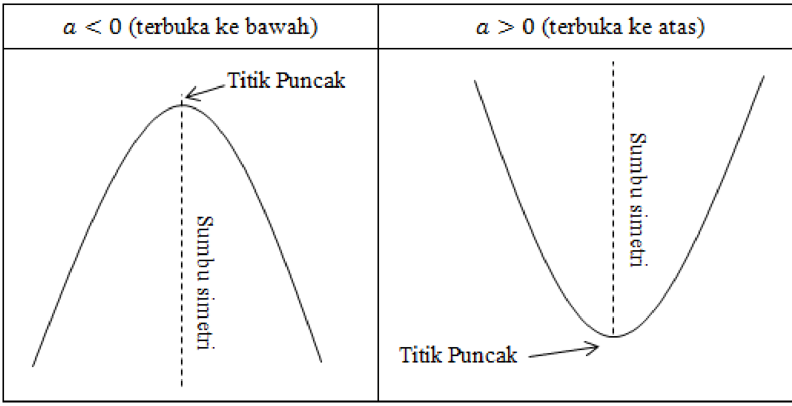
   Grafik ini merupakan hasil perubahan bentuk dari $y = ax^2 + bx + c$. Pada fungsi kuadrat ini grafik akan memiliki titik puncak (x, y) sama dengan (h, k). Hubungan antara a, b, dan c dengan h, k sebagai berikut:

$$(h, k) = [-\frac{b}{2a}, -(\frac{b^2-4ac}{2a})]$$

Sifat-sifat Grafik Fungsi Kuadrat

a. Grafik terbuka

   Grafik $y = ax^2 + bx + c$ dapat terbuka ke atas atau ke bawah. Sifat ini ditentukan oleh nilai a. Jika a > 0 maka grafik terbuka ke atas, jika a < 0 maka grafik terbuka kebawah.



Gambar 3.12. Grafik Fungsi Terbuka

b. Titik Puncak

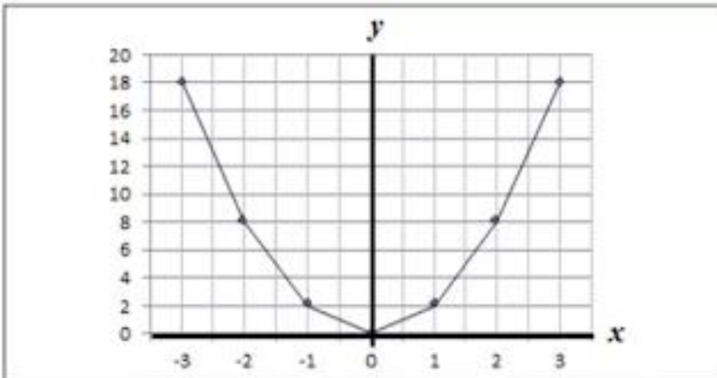
Grafik kuadrat mempunyai titik puncak atau titik balik. Jika grafik terbuka kebawah, maka titik puncak adalah titik maksimum. Jika grafik terbuka keatas maka, titik puncak adalah titik minimum.

c. Sumbu Simetri

Sumbu simetri membagi grafik kuadrat menjadi 2 bagian sehingga tepat berada di titik puncak. Karena itu, letaknya pada grafik $ax^2 + bx + c$ berada pada: $x = \frac{a}{2a}$.

d. Titik potong sumbu **y**

Grafik $y = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu **y** di **x = 0**. Jika nilai **x = 0** disubstitusikan ke dalam fungsi, diperoleh **y = c**. Maka titik potong berada di **(0, c).**



koordinat								
	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	18	8	2	0	2	8	18

Gambar 3.13. Grafik Fungsi ax + bx + c

e. Titik potong sumbu x

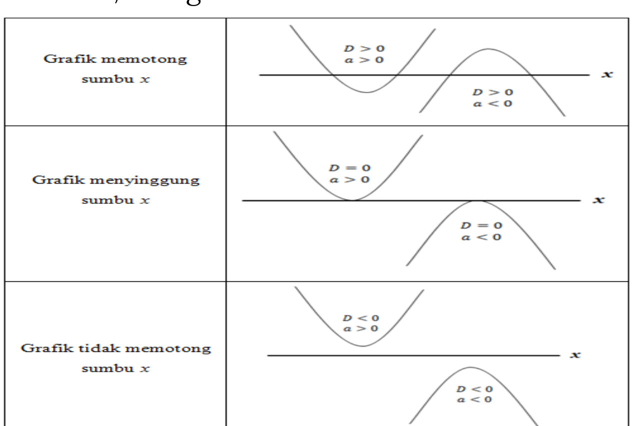
Grafik kuadrat akan memotong sumbu x di y = 0, sehingga membentuk persamaan:

$$ax^2 + bx + c$$

Akar-akar dari persamaan tersebut adalah absis dari titik potong. Oleh karena itu, nilai diskriminan (D) berpengaruh pada keberadaan titik potong sumbu x sebagai berikut:

- Jika $D > 0$, grafik memotong sumbu x di dua titik
- Jika $D = 0$, grafik menyinggung sumbu x
- Jika $D < 0$, grafik tidak memotong sumbu x

Jika digambarkan, sebagai berikut:



Gambar 3.14. Grafik Fungsi Singgung - Potong Sumbu x

Menyusun Persamaan Grafik Fungsi Kuadrat

Persamaan grafik fungsi kuadrat dapat dibentuk dengan syarat:

1. Diketahui tiga titik koordinat (x, y) yang dilalui oleh grafik
   Ketiga koordinat tersebut, masing-masing disubstitusikan kedalam persamaan grafik: $y = ax^2 + bx + c$
   Sehingga didapat tiga persamaan berbeda yang saling memiliki variabel a, b dan c. Selanjutnya dilakukan teknik eliminasi aljabar untuk memperoleh nilai dari a, b dan c. Setelah diperoleh nilai-nilai itu, kemudian masing-masing disubstitusikan ke dalam persamaan $y = ax^2 + bx + c$ sebagai koefisien.
2. Diketahui titik potong dengan sumbu x dan satu titik yang dilalui
   Jika titik potong sumbu x adalah ($x1$,0) dan ($x2$,0), maka rumus fungsi kuadrat nya adalah: $y = a\ (x\ \square x1)\ (x\ \square x2)$
   Dengan nilai a didapat dari mensubstitusikan titik (x, y) yang dilalui.
3. Diketahui titik puncaknya dan satu titik yang dilalui
   Jika titik puncaknya adalah (x_p, y_p), maka rumus fungsi kuadrat nya adalah: $y = a\ (x - x_p)^2 + y_p$
   Dengan nilai a didapat dari mensubstitusikan titik (x, y) yang dilalui.

Uji Garis Tegak:

Kurva di bidang *xy* merupakan grafik suatu fungsi *x* jika dan hanya jika terdapat garis tegak yang memotong kurva sebanyak sekali.

1. **Daerah Asal dan Daerah Hasil Fungsi**
   Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) fungsi, sedangkan himpunan semua nilai *f*(x) dalam himpunan B disebut daerah hasil (*range*) fungsi.
2. **Penyajian Fungsi**
   Terdapat 4 cara yang mungkin untuk menyajikan suatu fungsi, yaitu:
   a) Secara lisan
   b) Secara numerik
   c) Secara visual
   d) Secara aljabar

3. Simetri

a) Jika fungsi $\boldsymbol{f}$ memenuhi $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ untuk setiap bilangan $\boldsymbol{x}$ di daerah asalnya, maka $\boldsymbol{f}$ disebut fungsi genap. Ciri geometris suatu fungsi genap adalah grafiknya simetri terhadap sumbu-y. Ini berarti bahwa jika kita telah mempunyai grafik $\boldsymbol{f}$ untuk $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, seluruh grafik akan kita peroleh cukup dengan cara mencerminkan terhadap sumbu y

b) Jika fungsi $\boldsymbol{f}$ memenuhi $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ untuk setiap bilangan $\boldsymbol{x}$ di daerah asalnya, maka $\boldsymbol{f}$ disebut fungsi ganjil. Ciri geometris suatu fungsi ganjil adalah grafiknya simetri terhadap titik asal. Ini berarti bahwa jika kita telah mempunyai grafik $\boldsymbol{f}$ untuk $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, seluruh grafik akan kita peroleh cukup dengan cara memutar sebesar 180° titik asal.

4. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

a) Fungsi $\boldsymbol{f}$ disebut fungsi naik pada selang $\boldsymbol{I}$ jika: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$ jika $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}$ **di** $\boldsymbol{I}$

b) Fungsi $\boldsymbol{f}$ disebut fungsi turun pada selang $\boldsymbol{I}$ jika: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$ jika $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}$ **di** $\boldsymbol{I}$

Latihan 4

Carilah daerah asal dan daerah hasil dari fungsi-fungsi berikut ini.

1. $f(x) = 2x + 12$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 12$
3. $f(x) = x^2 + 5x - 20$
4. $f(x) = x^3 + 1$
5. $f(x) = x^4 + 10$
6. $f(x) = \sqrt{3x - 12}$
7. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
8. $f(x) = 1 + sin^2\,(3x)$
9. $f(x) = [5 + 2\cos(3x)]^2 - \frac{1}{2}$
10. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{jika } x < -1 \\ 3 - x, \text{jika } x \geq -1 \end{cases}$

Carilah rumus untuk fungsi yang diuraikan dan nyatakanlah daerah asalnya.

a) Persegi panjang mempunyai luas 16 m^2. Nyatakanlah keliling persegi panjang itu sebagai fungsi panjang salah satu sisinya.
b) Persegi panjang mempunyai keliling 20 m. Nyatakanlah luas persegi panjang itu sebagai panjang salah satu sisinya.
c) Nyatakanlah luas segitiga sama sisi sebagai fungsi sisinya.

Tentukanlah apakah fungsi berikut merupakan fungsi genap, ganjil, atau bukan keduanya. Buktikan!

a) $f(x) = x^4 - 4x^2$
b) $f(x) = x^3 - x$
c) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

3.3. Model Matematika

Definisi

Model matematika adalah uraian secara matematika (seringkali menggunakan fungsi atau persamaan) dari fenomena dunia nyata seperti populasi, permintaan untuk suatu barang, kecepatan benda jatuh, konsentrasi hasil dalam reaksi kimia, harapan hidup seseorang pada waktu lahir, atau biaya reduksi emisi. Tujuan model adalah untuk memahami suatu fenomena dan mungkin membuat prakiraan tentang perilaku di masa depan.

Jenis-jenis Fungsi, diantaranya:

a. Fungsi Linear
b. Fungsi Polinom
c. Fungsi Rasional
d. Fungsi Trigonometri dan Invers Trigonometri
e. Fungsi Eksponensial
f. Fungsi Logaritma

Fungsi Baru dari Fungsi Lama

a. **Komposisi Fungsi**

Diberikan dua fungsi f dan g, fungsi komposit $f \; o \; g$ (disebut juga komposisi dari f dan g) didefinisikan sebagai $(\boldsymbol{f \; o \; g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$

Untuk fungsi f dan g dan h, maka fungsi komposit:
$(\boldsymbol{f \; o \; g \; o \; h})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})))$

b. **Fungsi Invers**

Misalkan $\boldsymbol{f}$ adalah fungsi satu-satu dengan daerah asal **A** dan daerah nilai **B**, maka fungsi invers dari $\boldsymbol{f}$ yakni $\boldsymbol{f^{-1}}$ yang mempunyai daerah asal **B** dan daerah nilai **A**, didefinisikan sebagai:

$$\boldsymbol{f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y}$$

untuk setiap $\boldsymbol{y}$ di **B**.

Catatan:

$$(\boldsymbol{f \; o \; g})^{-1}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{g^{-1} \; o \; f^{-1}})(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{g^{-1}}\left(\boldsymbol{f^{-1}(x)}\right))$$

Latihan 5

1. Pengelola sebuah pasar kaget akhir minggu ini mengetahui dari pengalaman bahwa jika ia menarik x dolar untuk sewa tempat di pasar itu, maka banyaknya lokasi y yang dapat disewakan diberikan oleh persamaan $y = 200 - 4x$.
   a. Sketsalah grafik fungsi tersebut.
   b. Apa yang dinyatakan oleh kemiringan, perpotongan terhadap sumbu y, dan perpotongan terhadap sumbu x dari grafik tersebut.

2. Diketahui $f(x) = \frac{x}{x-1}, g(x) = x^2 + 1$ dan $h(x) = \sqrt{x}$. Tentukanlah:
   a. $(\, f \; o \; g \,)(x)$
   b. $(\, f \; o \; h \,)(x)$
   c. $(\, f \; o \; g \; o \; h \,)(x)$
   d. $(\, f \; o \; h \; o \; g \,)(x)$
   e. $(\, h \; o \; h \; o \; f \,)(x)$

f. $f^{-1}(x)$
g. $g^{-1}(x)$
h. $h^{-1}(x)$
i. $(f\ o\ g)^{-1}(x)$

3. Tentukanlah $f(x)$ jika:
   a. $g(x) = 3x + 2$ dan $(f\ o\ g)(x) = 18x^2 + 23x + 8$
   b. $g(x) = 4x^2 - 1$ dan $(f\ o\ g)(x) = 28x^2 - 3$

   Tentukanlah $g(x)$ jika
   a. $f(x) = x^2 + 1$ dan $(f\ o\ g)(x) = 4x^2 + 12x + 10$
   b. $f(x) = x^2 + 7$ dan $(f\ o\ g)(x) = x + 10$

3.4. Kesimpulan

1. Fungsi adalah aturan yang memadankan setiap elemen **x** dalam himpunan A secara tepat satu elemen, yang disebut ***f*(x)** dalam himpunan **B**. Fungsi juga merupakan Relasi dari himpunan **A** ke himpunan **B**.
2. Fungsi Komposisi adalah susunan dari beberapa fungsi yang terhubung dan bekerja sama
3. Grafik fungsi adalah grafik yang menunjukkan hubungan antara setiap nilai x dengan bayangannya (y) pada suatu fungsi f
4. Fungsi linear adalah fungsi dengan pangkat variabel tertinggi 1, dengan bentuk umum
5. **Fungsi kuadrat** adalah suatu persamaan dari variabel yang mempunyai pangkat tertinggi dua

Tugas dan Latihan
Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti.

1. Carilah daerah asal dan daerah hasil dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = x^2 - 5x + 20$
   b. $f(x) = 2 + \sqrt{8x + 5}$
   c. $f(x) = 5 + cos^2(5x)$
   d. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{jika } x \geq 2 \\ 7 - 2x, \text{jika } x < 2 \end{cases}$

2. Tentukanlah apakah fungsi berikut adalah fungsi genap, ganjil, atau bukan keduanya. Buktikan!

   a) $f(x) = x^2 + 3x^2$ b) $f(x) = 2x^5 + 3x^3 - x$

3. Diketahui $f(x) = \frac{x+1}{x-2}, g(x) = 1 - 5x,$ dan $h(x) = 1 + \sqrt{x}$.

   Tentukanlah:

   a. $(f \circ g)(x)$
   b. $(f \circ h)(x)$
   c. $(f \circ g \circ h)(x)$
   d. $(f \circ h \circ g)(x)$
   e. $(h \circ h \circ f)(x)$
   f. $f^{-1}(x)$
   g. $g^{-1}(x)$
   h. $h^{-1}(x)$
   i. $(f \circ g)^{-1}(x)$

Referensi:

Rahmani-Andebili, M. (2023). Calculus I: Practice Problems, Methods, and Solutions. Springer Nature.

Weisstein, Eric W. "Function", 2023

BAB IV

LIMIT DAN KONTINUITAS

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah: **Mahasiswa dapat menerapkan operasi fungsi pada pembahasan limit suatu fungsi.**

Bahan kajian pembelajaran pada bab ini adalah penjelasan secara komprehensif tentang **Limit, Teknik Perhitungan Limit dan Kontinuitas**.

Sub capaian pembelajaran mata kuliah dalam dalam pertemuan ini adalah mahasiswa diharapkan dapat mengetahui dan memahami tentang **Limit, Teknik Perhitungan Limit, Limit Sebagai Suatu Pendekatan, Kontinuitas.**

Indikator pencapaian dalam pertemuan ini adalah mahasiswa dapat mendeskripsikan mampu menjelaskan dan mempraktekkan **Limit, Teknik Perhitungan Limit, Limit Sebagai Suatu Pendekatan, Kontinuitas.**

Penyampaian materi adalah dengan **ceramah, diskusi, dan praktek**

4.1. Limit

Definisi Limit

Limit merupakan suatu batas yang menggunakan konsep pendekatan fungsi. Jadi, bisa dibilang limit adalah nilai yang didekati fungsi saat suatu titik mendekati nilai tertentu. Limit juga disebut dengan suatu nilai yang didekati dari arah kiri atau arah kanan akan menuju sebuah nilai tertentu. Bentuk Umum Limit:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \; dimana \; x \neq c$$

Dibaca: Limit fungsi f (x) untuk x mendekati c adalah L

Teorema Limit

Untuk $k, a \in R$, maka

- $f(x) = k \rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = k$
- $\lim_{x \to a}[k \,.\, f(x)] = k \,.\, \lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{n \to \infty} g(x)$
- $\lim_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{n \to \infty} g(x)$
- $\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ $dengan$ $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^2$

Penyelesaian Limit

a) Secara Langsung

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Dengan $f(a) \in R$

b) Bentuk Limit Aljabar → jika $f(a) = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, atau $\infty \pm \infty$

1. Faktorisasi
2. Dalil **L'Hospital** (turunan): $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
3. Kali Sekawan: Bentuk $a \pm \sqrt{b}$ atau $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$
4. Bagi x dengan pangkat tertinggi di penyebut:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{a_1x^m + b_1x^{m-1} + c_1x^{m-2} + \cdots}{a_2x^m + b_2x^{m-1} + c_2x^{m-2} + \cdots}\right] = F$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = n \rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \\ m > n \rightarrow \infty \\ m < n \rightarrow 0 \end{cases}$$

5. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + dx + e}\right] = \frac{b-d}{2\sqrt{a}}$

c) Bentuk Limit Trigonometri

1. Faktorisasi
2. Dalil ***L'Hospital*** (turunan): $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
3. Gunakan Sifat
   - $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1$
   - $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right) = 1$
   - $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{bx}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{ax}{\sin bx}\right) = \frac{a}{b}$
   - $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan cx}{dx}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{cx}{\tan dx}\right) = \frac{c}{d}$
4. Gunakan Alat Bantu
   - $sin^2 x + cos^2 x = 1$
   - $sin^2 ax + cos^2 ax = 1$
   - $sin 2x = 2\sin x\cos x$
   - $cos 2x = \begin{cases} 2cos^2 x - 1 \\ 1 - 2sin^2 x \\ cos^2 x - sin^2 x \end{cases}$
   - $\sin x + \sin y = 2sin\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] cos\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]$
   - $\sin x - \sin y = 2sin\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] sin\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]$
   - $\cos x + \cos y = 2sin\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] cos\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]$
   - $\cos x - \cos y = 2sin\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] sin\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]$

Contoh Soal:

1. Tentukan hasil dari soal limit berikut $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 4x} = \cdots$

Pembahasan

Cara pertama dengan rumus yang ada diatas, sehingga langsung didapatkan

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}$$

atau dengan cara kedua yang lebih panjang, memakai turunan, 3x turunkan jadi 3 dan sin 4x turunkan jadi 4 cos 4x, kemudian ganti x dengan nol.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{4 \cos 4x} = \frac{3}{4 \cos 4(0)} = \frac{3}{4 \cos 0} = \frac{3}{4(1)} = \frac{3}{4}$$

2. Tentukan hasil dari soal limit berikut $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{4x} = \cdots$

Pembahasan

Seperti nomor 1 juga

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x - \sin 2x}{4x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{4x} - \frac{\sin 2x}{4x}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

3. Tentukan hasil dari soal limit berikut $\lim_{x \to 0} \frac{3x \tan 2x}{1 - \cos 4x} = \cdots$

Pembahasan

Ubah dulu 1 – cos 4x menjadi 2 sin ^{2} 2x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x \tan 2x}{1 - \cos 4x} = \frac{3x \ \tan 2x}{2 \sin^2 2x} = \left(\frac{3x}{2 \sin 2x}\right)\left(\frac{\tan 2x}{\sin 2x}\right) = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

4. Nilai $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \tan 2x} = \cdots$

Pembahasan

Jika 1 – cos 4x menjadi 2 sin ^{2} 2x, tentunya cos 4x – 1 menjadi – 2 sin ^{2} 2x,

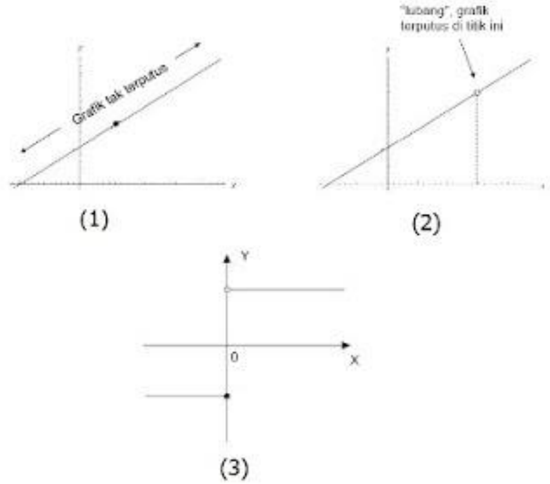
sehingga

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \tan 2x} = \frac{-2\sin^2 2x}{x \tan 2x} = \left(\frac{-2\sin 2x}{1x}\right)\left(\frac{\sin 2x}{\tan 2x}\right) = \frac{-2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 2} = -4$$

4.2. Kontinuitas

Kontinuitas dapat disamakan artinya dengan kesinambungan. Lawan kontinuitas adalah diskontinuitas, dimana jika kontinuitas itu kesinambungan maka diskontinuitas adalah tak sinambung. Kontinuitas suatu fungsi kurang lebih sama artinya dengan kesinambungan suatu fungsi.

Kontinuitas suatu fungsi sangat erat kaitannya dengan limit fungsi, maka dari itu prasyarat memahami materi limit sangat diperlukan di sini. Kontinuitas dan diskontinuitas dapat digambarkan dengan tiga buah grafik di bawah ini.



Gambar 4.1. Grafik Kontinuitas

Grafik (1) menggambarkan suatu fungsi yang kontinu, grafik (2) terdapat lubang (lingkaran terbuka) menggambarkan suatu fungsi yang diskontinu, dan grafik (3) terlihat jelas jika fungsi tersebut diskontinu juga. Nah, dapatkah kita menengetahui suatu fungsi kontinu atau tidak tanpa menggambarnya? Untuk menjawab pertanyaan tersebut, simaklah penjelasan di bawah ini.

Syarat Kontinuitas Suatu Fungsi

Suatu fungsi dikatakan kontinu atau tidak apabila memenuhi beberapa syarat. Simaklah definisi berikut:

$$\boldsymbol{f(a)\ ada}$$

$$\lim_{x \to a} \boldsymbol{f(x)\ ada}$$

$$\lim_{x \to a} \boldsymbol{f(x) = f(a)}$$

Jika salah satu diantara ketiga syarat tidak terpenuhi, maka fungsi $f(x)$ tidak kontinu pada interval $x = a$.

Definisi Kontinu

$$\lim_{x \to a} \boldsymbol{f\ (x) = f(x)}$$

Syarat Kontinu

- $\boldsymbol{f(a)}$ **terdefinisi**
- $\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x)}$ **terdefinisi**
- $\boldsymbol{f(a) = \lim_{x \to a} f(x)}$

Contoh Soal:

Contoh 1:

Selidiki, apakah fungsi $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x + 1}$ **kontinu di** $\boldsymbol{x = 1}$**?**

Penyelesaian:

Syarat 1

$f(x) = x^3 - x + 1$

$f(1) = 1^3 - 1 + 1 = 1$ (ada)

Syarat 2

$\lim_{x \to 1} x^3 - x + 1 = 1^3 - 1 + 1 = 1$ (ada)

Syarat 3

$f(1) = 1$ dan $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, maka $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Karena ketiga syarat terpenuhi, maka fungsi $f(x) = x^3 - x + 1$ kontinu di $x = 1$

Contoh 2:

Selidiki, apakah fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ kontinu di $x = 2$?

Penyelesaian

Syarat 1

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$ = tak terdefinisi (tidak ada)

Karena syarat 1 tidak terpenuhi, maka fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ tidak kontinu di $x = 2$

Latihan 6

1. Selesaikan soal-soal Limit dibawah ini

   a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1}$

   b) $\lim_{nx\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3}$

   c) $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9-2}}{t^2}$

   d) $\lim_{t\to 100} \frac{100-t}{10-\sqrt{t}}$

   e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \tan 5x}{2x^2}$

   f) $\lim_{x\to 0} \frac{2-\cos 2x}{x^2}$

   g) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 6 - \cos 2x}{3x^2}$

   h) $\lim_{x\to \infty} \left[\frac{3x^3+5x^2-6x+15}{6x^4+x+30}\right]$

i) $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{9x^2+7x+12}-\sqrt{9x^2+5x+10}\right]$

j) Buktikan bahwa:

$$\lim_{x\to 0}|x| = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = 0$$

2. Selesaikan soal Kontinuitas dibawah ini
   a) Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} x+1, untuk\ x < 1 \\ ax+b, untuk\ 1 \le x \ \le 2 \\ 3x, untuk\ x > 2 \end{cases}$$

   Tentukan nilai a dan b agar fungsi tersebut kontinu untuk semua x

   b) Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} 2x+10, untuk\ x < 2 \\ ax^2\ + bx, untuk\ 2 \le x \ \le 4 \\ 5x-2, untuk\ x > 4 \end{cases}$$

   Tentukan nilai a dan b agar fungsi tersebut kontinu untuk semua x

4.3. Kesimpulan

1. limit adalah nilai yang didekati fungsi saat suatu titik mendekati nilai tertentu. Limit juga disebut dengan suatu nilai yang didekati dari arah kiri atau arah kanan akan menuju sebuah nilai tertentu
2. Kontinuitas dapat disamakan artinya dengan kesinambungan. Kontinuitas suatu fungsi kurang lebih sama artinya dengan kesinambungan suatu fungsi

Tugas dan Latihan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti.

1) Selesaikanlah soal-soal limit berikut ini.
   a. $\lim_{t\to 25} \frac{t-25}{\sqrt{t}-5}$
   b. $\lim_{t\to 0} \left(\frac{sin7x\ tan5x}{100x\ \sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)$
   c. $\lim_{x\to 0} \frac{100-100cos^2\ (x)}{\cos(2x)-1}$
   d. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{3x^2-x+9}-\sqrt{3x^2-2x+8}\right]$

2) Diketahui:

$$f(x)=\begin{cases} 5x-3, untuk\ x<3 \\ ax^2\ +bx, untuk\ 3\leq x\ \leq 6 \\ 8x+12, untuk\ x>6 \end{cases}$$

Tentukan nilai a dan b agar fungsi tersebut kontinu untuk semua x.

Referensi:

Iswadi, H., Asmawati, E., Juliana, J. R., Kartikasari, F. D., Siswantoro, J., & Herlambang, A. (2021). Kalkulus: Edisi Revisi. Media Nusa Creative (MNC Publishing).

Rifa'i, M. (2020). Kalkulus Diferensial (Limit, Turunan, Dan Aplikasi Turunan). Deepublish.

Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2021). Calculus: One and several variables. John Wiley & Sons.

Strang, G. (2020). Calculus v1. OpenStax.

BAB V

DIFFERENSIAL

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah: Mahasiswa dapat memecahkan **persamaan diferensial yang berorde satu dan dua beserta metode-metode untuk mencari solusinya, pemodelan dengan persamaan diferensial biasa orde satu dan dua, sistem persamaan diferensialnya.**

Bahan kajian pembelajaran pada bab ini adalah penjelasan secara komprehensif tentang **Konsep Dasar Persamaan Diferensial, jenis-jenis persamaan diferensial, jenis-jenis persamaan diferensial linier.**

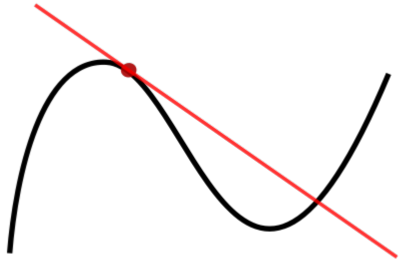
Sub Capaian pembelajaran mata kuliah dalam dalam pertemuan ini adalah mahasiswa diharapkan dapat mengetahui dan memahami tentang **Persamaan Diferensial dan metode-metode penyelesaiannya, Menyelesaikan permasalahaan Persamaan Diferensial, Menyelesaikan permasalahaan sistem Persamaan Diferensial, Menganalisis metode-metode penyelesaian Persamaan Diferensial,**

Indikator pencapaian dalam pertemuan ini adalah mahasiswa dapat mendeskripsikan mampu menjelaskan dan mempraktekkan **Mampu berpikir kreatif dalam menyelesaikan permasalahaan Persamaan Diferensial, Mampu menganalisis metode-metode penyelesaian yang di pakai untuk memecahkan permaslahaan Persamaan Diferensial.**

Mampu berpikir logis dalam menyelesaikan permasalahaan-permasalahaan Persamaan Diferensial, Mampu mengklasifikan jenis-jenis persamaan diferensial, Mandiri dalam mencari pengetahuan mengenai materi Persamaan Diferensial, Memiliki semangat tinggi untuk mendapatkan informasi.

Penyampaian materi adalah dengan **ceramah, diskusi, dan praktek Differensial** adalah mempelajari bagaimana nilai suatu fungsi berubah menurut perubahan input nilainya. Topik utama dalam pembelajaran kalkulus diferensial adalah **turunan**. Turunan dari suatu fungsi pada titik tertentu menjelaskan sifat-sifat fungsi yang mendekati nilai input. Untuk fungsi yang bernilai riil dengan variabel riil tunggal, turunan pada sebuah titik sama, dengan kemiringan dari garis singgung grafik fungsi pada titik tersebut. Secara umum, turunan suatu fungsi pada sebuah titik menentukan pendekatan linear terbaik fungsi pada titik tersebut.

Proses pencarian turunan disebut **pendiferensialan** (*differentiation*). Teorema dasar kalkulus menyatakan bahwa pendiferensialan adalah proses keterbalikan dari pengintegralan.



Grafik dari sebuah fungsi (garis hitam) dan sebuah garis singgung terhadap fungsi (garis merah). Kemiringan garis singgung sama dengan turunan dari fungsi pada titik singgung .

Gambar 5.1. Grafik Fungsi Singgung

5.1. Definisi Diferensial/Turunan

$$\boldsymbol{y' = f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]}$$

Catatan:

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

d) $(a-b)^3 \square a^3 \square 3a^2b \square 3ab^2 \square b^3$

5.2. Rumus-rumus Dasar Diferensial/Turunan

Untuk $a \neq 0$, maka:

a) $y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$
b) $y = \sin ax \rightarrow y' = a \cos ax$
c) $y = \cos ax \rightarrow y' = -a \sin ax$
d) $y = \tan ax \rightarrow y' = a \sec^2 ax$
e) $y = \cot ax \rightarrow y' = -a \csc^2 ax$
f) $y = \sec ax \rightarrow y' = a (\sec ax)(\tan ax)$
g) $y = \csc ax \rightarrow y' = -a (\csc ax)(\cot ax)$
h) $y = ln[x] \rightarrow y' = \frac{1}{x}$
i) $y = e^x \rightarrow y' = e^x$
j) $y = e^{ax} \rightarrow y' = ae^{ax}$
k) $y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a,\ a \neq 1$
l) $y = tan^{-1}(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x^2+1}$
m) $y = sin^{-1}(x) \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5.3. Sifat-sifat Diferensial/Turunan

a) $y = f(x) = k$ (konstanta) $\Rightarrow y' = f'(x) = 0$
b) $y = f(x) = kx \Rightarrow y' = f'(x) = k$
c) $y = kf(x) \Rightarrow y' = kf'(x)$
d) $y = [f(x) \pm g(x)] \rightarrow y' = [f'(x)] \pm [g'(x)]$
e) $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$
f) $y = \frac{u}{v} \rightarrow v' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

g) **Aturan Rantai:**

$$y = f(u), u = f(t), \text{dan } t = f(x) \rightarrow \; y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

5.4. Turunan Logaritmik

⇒ Fungsi berpangkat fungsi

<u>Catatan:</u>

a) $\ln(x^r) = r \ln x$

b) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

c) $ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

d) $\ln(e) = 1$

e) $\ln(e^x) = x, x \in R$

f) $e^{\ln x} = x, x > 0$

Contoh:

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ dari $y = x^2$

Penyelesaian

a) $y = x^2$

b) $\leftrightarrow \ln(y) = \ln(x^x)$

c) $\leftrightarrow \ln(y) = x\ln(x)$

d) $\leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left[1.\ln(x) + x.\frac{1}{x}\right]$

e) $\leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = [\ln(x) + 1]$

f) $\leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y[\ln(x) + 1]$

g) $\leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2[\ln(x) + 1]$

5.5. Turunan Implisit

Secara umum, berdasarkan hubungan antara variabel bebas (x) dan tak bebasnya (y), bentuk fungsi dapat dibedakan menjadi dua yakni fungsi eksplisit dan fungsi implisit. Fungsi dengan notasi y = f(x) disebut fungsi eksplisit yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Sedangkan fungsi implisit yaitu fungsi yang variabel bebas dan variabel tak bebasnya bercampur dalam satu ruas baik di ruas kanan maupun di ruas kiri persamaannya.

Contoh:

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ dari $x^2 + y^2 = 25$

Penyelesaian:

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $\leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$

c) $\leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(y^2) = 0$

d) $\leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

e) $\leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x$

f) $\leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$

g) $\leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

5.6. Turunan Tingkat Tinggi

Operasi pendiferensialan mengambil sebuah fungsi F dan menghasilkan sebuah fungsi baru f′. Jika f′ sekarang diferensialkan, maka masih menghasilkan fungsi lain, dinyatakan oleh f" (dibaca "f dua aksen") dan disebut turunan kedua dari f.

Contoh:

Tentukanlah $f'''(x)\ dari\ f(x) = x \sin x$

Penyelesaian:

$$f(x) = x \sin x$$
$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x$$
$$= \sin x + x \cos x$$
$$f''(x) = \cos x + \left[1 \cdot \cos x + x(-\sin x)\right]$$
$$= \cos x + [\cos x - x \sin x]$$
$$= 2 \cos x - x \sin x$$
$$f'''(x) = 2(-\sin x) - [1 \cdot \sin x + x \cos x]$$
$$= -2\sin x - \sin x - x \cos x$$
$$= -3\sin x - x \cos x$$

5.7. Laju yang Terkait Strategi yang digunakan:

1. Baca masalah secara seksama.
2. Gambarkan diagram jika mungkin.
3. Perkenalkan notasi. Berikan lambang kepada semua besaran yang merupakan fungsi waktu.
4. Nyatakan informasi yang diketahui dan laju yang diperlukan dalam bentuk turunan.
5. Tuliskan persamaan yang mengaitkan beragam besaran dari masalah tersebut. Jika perlu, gunakan geometri untuk menghilangkan satu peubah melalui substitusi.
6. Gunakan aturan rantai untuk menurunkan kedua ruas persamaan terhadap t.
7. Substitusikan informasi yang diketahui ke dalam persamaan yang dihasilkan dan pecahkan untuk laju yang tidak diketahui tersebut.

Latihan 7

1. Tentukanlah $f'(x)$ dengan menggunakan definisi dari:
   a. $f(x) = 2x + 1$
   b. $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
   c. $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 10x - 2020$

2. Tentukanlah $f'(x)$ dari fungsi=fungsi dibawah ini:
   a. $y = 3x^4 + 7\sqrt{x} + \frac{3}{x^4} - 5$
   b. $y = 9x^{12} + 10x\sqrt{x} + \frac{7}{x^4} - 1972$
   c. $y = 4\ tan(5x) + 2sin\left(\frac{2}{3}x\right) + e^{2x}$
   d. $y = 7\ sec(3x) + cos\left(\frac{3}{\sqrt{2}}x\right) + 5^2$
   e. $y = e^{2x}\sin x$
   f. $y = \frac{3x+7}{\tan\ (3x)}$
   g. $y =\ sin^3(2x^4 + 2x - 10)$
   h. $y =\ tan^2(6x^8 + 12x^3 + 5)$
   i. $y = \sin(\sin(\sin x))$
   j. $y = \sin(\cos(\sec x))$
   k. $y = x^{\sin x}$

3. Carilah $\frac{dy}{dx}$ dengan cara turunan implisit dibawah ini:
   a. $x^3 + y^3 = 6xy$
   b. $x^2y - 6xy - 8 = 0$
   c. $x^2 - 2xy + y^2 + 10 = 0$

4. Carilah $\frac{d^3y}{dx^3}$ atau $f'''(x)$ dari:
   a. $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 8$
   b. $y =\ (2x + 1)^{10}$
   c. $y = 5x\cos(x)$

5. Selesaikanlah soal-soal laju yang terkait berikut ini.
   a. Jika **V** adalah volume kubus yang panjang sisinya x dan kubus membesar seiring berjalannya waktu. Carilah dalam bentuk $\boldsymbol{\frac{dV}{dt}}$ dalam bentuk $\boldsymbol{\frac{dx}{dt}}$.

   b. Udara dipompakan ke dalam balon bundar sehingga volumenya bertambah pada laju 100 cm^3/detik. Seberapa cepatkah jari-jari balon bertambah pada waktu garis tengahnya 50 cm? Uraikanlah jawaban Anda.

5.8. Kesimpulan

1. Didalam persamaan diferensial biasa, dipelajari tentang konsep persamaan diferensial linear dan Persamaan diferensial linear orde satu
2. Fungsi implisit yaitu fungsi yang variabel bebas dan variabel tak bebasnya bercampur dalam satu ruas baik di ruas kanan maupun di ruas kiri persamaannya
3. Operasi pendiferensialan mengambil sebuah fungsi F dan menghasilkan sebuah fungsi baru f′. Jika f′ diferensialkan, maka masih menghasilkan fungsi f” (dibaca “f dua aksen”) dan disebut turunan kedua dari f

Tugas dan Latihan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti:

1. Tentukanlah $f'(x)$ dengan menggunakan definisi dari:
   $f(x) = 10x^3 + 8x^2 + 4x - 200$

2. Tentukanlah $f'(x)$ dari fungsi-fungsi berikut ini:
   a) $y = 8x^3 + \sqrt{x} + \frac{6}{x^{10}} - 50$
   b) $y = 2\,cos\left(\frac{5}{3}x\right) + e^{2x} + 12^x$
   c) $y = \frac{\sin(5x)+1}{e^{2x}-1}$
   d) $y = sin^3\left(cos\left(\sqrt{x^2 + 2x + 1}\right)\right)$
   e) $y = (\cos x)^{\ln x}$

3. Carilah $\frac{dy}{dx}$ dengan cara turunan implisit dari
   $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 10$

4. Carilah $\frac{d^3y}{dx^3}$ atau $f'''(x)$ dari $y = x^2 \sin(5x)$

5. Tangga dengan panjang 10 kaki bersandar pada dinding tegak. Jika alas tangga bergeser menjauhi dinding pada laju 1 kaki/detik, seberapa cepatkah puncak tangga bergeser ke bawah terhadap dinding pada alas tangga berjarak 6 kaki dari dinding? Uraikanlah jawaban Anda.

Referensi:

Misbah, M. (2022). Persamaan Differensial Matematika Fisika.

Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. ZDM–Mathematics Education, 53(3), 621-633.

Murtafiah, W., & Apriandi, D. (2018). Persamaan Diferensial Biasa Dan Aplikasinya

Razali, M., Ir Arman Sani, M. T., Ir M Zulfin, M. T., Rahayu, I. T., Siregar, M. N., & Marpaung, F. (2021). Kalkulus Diferensial: Edisi Revisi. umsu press.

BAB VI

TURUNAN

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah: Mahasiswa dapat **mengidentifikasi permasalahan turunan**

Bahan kajian pembelajaran pada bab ini adalah penjelasan secara komprehensif tentang **Konsep turunan, masalah garis singgung, dan kecepatan sesaat, turunan dari jumlah fungsi, hasil kali fungsi, dan hasil bagi fungsi.**

Sub capaian pembelajaran mata kuliah dalam dalam pertemuan ini adalah mahasiswa diharapkan dapat **Mampu menentukan nilai limit fungsi di suatu titik dan kontinuitas fungsi.**

Indikator pencapaian dalam pertemuan ini adalah mahasiswa dapat mendeskripsikan mampu menjelaskan dan mempraktekkan **hubungan keterdiferensialan dan kekontinuan serta turunan dari jumlah fungsi, hasil kali fungsi, dan hasil bagi fungsi.**

Penyampaian materi adalah dengan **ceramah**, **diskusi**, **dan praktek**

Perhatikan sebuah benda yang jatuh bebas. Hasil percobaan menunjukan posisinya setiap saat

$S(t) = 8t^2$. Ingin diketahui berapa kecepatannya saat $t = 1$?

Tabel 6.1. Tabel Percepatan dan Kecepatan

t_1	t_2	$s(t_1)$	$s(t_2)$	$V_{rata-rata} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
1	2	8	32	24
1	1,5	8	18	20
1	1,1	8	9,68	16,8
1	1,01	8	8,1608	16,08
1	1,001	8	8,016008	16,008

Untuk menghitung kecepatan sesaat pada $t = 1$, didefinisikan kecepatan sesaat sebagai berikut:

$$V_{sesaat} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{rata-rata} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Definisi Turunan:

Turunan atau Derivatif merupakan pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai masukan. Secara umum, turunan menyatakan bagaimana suatu fungsi berubah akibat perubahan variabel; contohnya, turunan dari posisi sebuah benda bergerak terhadap waktu adalah kecepatan sesaat objek tersebut. Sedangkan turunan fungsi (diferensial) adalah fungsi lain dari suatu fungsi sebelumnya, misalnya fungsi *f* menjadi *f'* yang mempunyai nilai tidak beraturan

Misalkan f sebuah fungsi riil dan $x \in D_f$. Turunan dari f di titik x, dituliskan sebagai:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Beberapa notasi turunan

Apabila terdapat suatu fungsi ***f*(x)**, maka kita dapat mengetahui gradien **(*m*)** dari fungsi tersebut, menggunakan persamaan

$$m = \frac{f\,(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$$

Atau apabila kita hanya peduli di satu titik $\boldsymbol{x}$ saja,

$$m = \frac{f\ (x +\ \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dimana kita mengambil $\mathbf{x = x_1}$, dan $\mathbf{\Delta x = x_2 - x_1}$, yang merupakan jarak antara x dengan nilai x lain yang sembarang. Dengan kata lain, apabila kita analisis secara numerik, nilai $\mathbf{\Delta x}$ ini akan berpengaruh pada ketelitian nilai gradien yang kita hitung. Semakin kecil nilai $\boldsymbol{\Delta x}$, maka nilai $\boldsymbol{m}$ akan semakin mendekati nilai yang sebenarnya, sebagai mana yang telah kita peroleh sebelumnya. Persamaan (1) tentunya dapat dipersingkat menjadi

$$m = \frac{\Delta f\ (x)}{\Delta x}$$

Dengan catatan bahwa $\mathbf{\Delta x}$ tidak boleh bernilai nol, karena akan menghasilkan bilangan tak tentu. Namun $\mathbf{\Delta x}$ dapat merupakan bilangan yang sangat kecil, atau disebut sebagai bilangan ***infinitesimal***, yang dimana bilangan tersebut mendekati nilai nol. Dalam kasus ini, seperti yang telah dibahas sebelumnya, Persamaan (1) akan menjadi fungsi limit, serta

$$m = f'(x) = \lim_{\boldsymbol{\Delta x \to 0}} \frac{\boldsymbol{f(x + \Delta x) - f(x)}}{\boldsymbol{\Delta x}} = \frac{\boldsymbol{df(x)}}{\boldsymbol{dx}}$$

Atau

$$f'(x) = \frac{df\ (x)}{dx}$$

Yang kita lakukan disini pada dasarnya adalah mengganti simbol $\mathbf{\Delta}$ dengan $\boldsymbol{d}$, apabila $\mathbf{\Delta x}$ merupakan bilangan infinitesimal. Dengan kata lain, ketika $\mathbf{\Delta x}$ menjadi nilai yang sangat kecil, simbol $\mathbf{\Delta}$ akan berubah menjadi $\boldsymbol{d}$, sehingga $\mathbf{\Delta x}$ akan menjadi $\boldsymbol{dx}$, begitu pula dengan $\boldsymbol{\Delta f(x)}$ yang menjadi $\boldsymbol{df(x)}$. Simbol $\boldsymbol{d}$ ini pada dasarnya adalah simbol ***diferensial***, yang menandai ketergantungan satu variabel dengan variabel lain. Dalam kasus ini, variabel $\boldsymbol{f(x)}$ bergantung terhadap $\boldsymbol{x}$, sehingga akan lebih lengkap apabila kita tuliskan sebagai $\boldsymbol{df(x)/dx}$, alih-alih menuliskan $\boldsymbol{f(x)/x}$.

Sampai titik ini, kita sudah dapat mulai bicara menggunakan konsep diferensial ini saja, tanpa harus membahas fungsi limit secara rinci. Apabila kita lihat dari Persamaan (3), dapat kita ketahui bahwa $\boldsymbol{f'(x)}$ merupakan turunan dari $\boldsymbol{f(x)}$ terhadap variabel $\boldsymbol{x}$. Artinya, informasi yang diberikan oleh fungsi $\boldsymbol{f'(x)}$ pada dasarnya adalah informasi tentang bagaimana variabel $\boldsymbol{f(x)}$ berubah terhadap variabel $\boldsymbol{x}$, seperti halnya gradien pada Persamaan (2). Dari persamaan tersebut, apabila Δx bernilai semakin kecil, dan $\boldsymbol{\Delta f(x)}$ dibuat tetap, maka $\boldsymbol{m}$ akan semakin besar nilainya. Artinya, perubahan kecil dari x akan membuat nilai $\boldsymbol{f(x)}$ berubah drastis, yang ditandai oleh besarnya nilai $\boldsymbol{m}$. Begitu juga dengan Persamaan (4), apabila $\boldsymbol{f'(x)}$ bernilai sangat besar, maka artinya fungsi $\boldsymbol{f(x)}$ dapat bernilai sangat besar pula hanya dengan perubahan nilai x yang sangat kecil. Fungsi $f'(x)$ ini dengan demikian dapat kita definisikan sebagai ***laju perubahan fungsi*** **$f(x)$** ***terhadap*** x. Pernyataan ini tentu saja memberikan kita definisi baru tentang turunan, yakni merupakan ***laju perubahan satu variabel terhadap variabel lain.*** Definisi ini ekivalen dengan definisi gradien pada kurva.

Selanjutnya, bagaimana jika $\boldsymbol{f'(x)}$ memiliki nilai yang berubah terhadap $\boldsymbol{x}$? Kita dapat menghitung laju perubahan $\boldsymbol{f'(x)}$ terhadap $\boldsymbol{x}$ (kita akan definisikan fungsi laju perubahan ini sebagai $\boldsymbol{f''(x)}$) sama halnya seperti laju perubahan $\boldsymbol{f(x)}$ terhadap $\boldsymbol{x}$, sehingga

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

Apabila digabungkan dengan Persamaan (3), maka

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$$

Notasi seperti ini akan lebih mudah dituliskan menjadi

$$f''(x) = \frac{d^2 f\ (x)}{dx^2}$$

Sehingga *f*"(*x*) ini sering disebut sebagai ***turunan kedua dari f(x).*** Dengan demikian, dengan cara yang sbama, turunan ke-**N** dari ***f(x)*** dapat kita nyatakan sebagai

$$f^N(x) = \frac{d^N f(x)}{dx^N}$$

6.1 Aturan Turunan

Misalkan **c** adalah konstanta. ***f*(x)=c** maka ***f*'(x)=0**

1. ***f*(x)=cx**, maka ***f*'(x) = c**
2. $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = u(x).v(x)$, maka $f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$
4. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, maka $f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$

Turunan Berantai

Jika $u = f(x)$ dan $y = u^n$

Maka $y' = n.u^{n-1}.u'$

Fungsi Trigonometri

$$y = \sin x \in y' = \cos x$$
$$y = \cos x \in y' = -\sin x$$

Jika $u = f(x)$ maka berlaku:

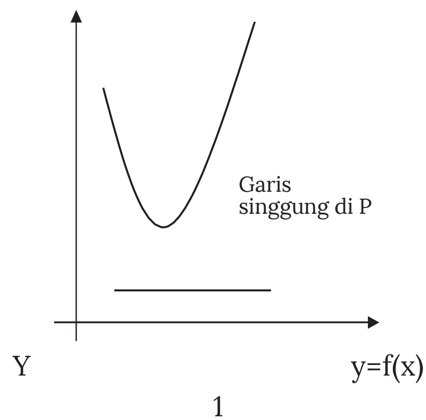
$$y = \sin u \in y' = \cos u.u'$$
$$y = \cos u \in y' = -\sin u.u'$$

Dengan menggunakan teorema turunan diperoleh:

$$y = \tan\ u \in y' = \frac{1}{\cos^2 u}.u' = sec^2 u.u'$$
$$y = \cos\ u \in y' = \frac{1}{-\sin^2 u}.u' = -\cos ec^2\ u.u'$$

6.2 Tafsiran Geometris suatu Turunan Fungsi

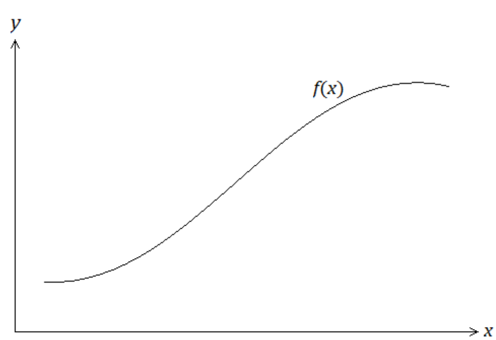
a. Garis Singgung Kurva



Gambar 6.1. Grafik Garis Singgung Turunan

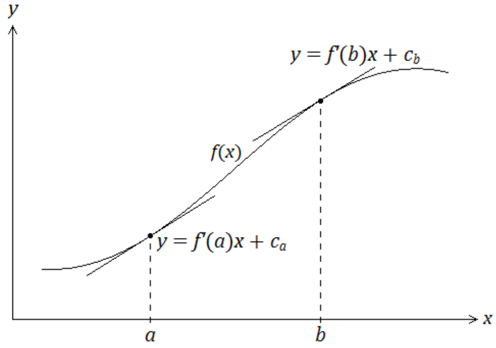
1. Gradien garis singgung $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})$
   Persamaan Garis Singgung dengan gradien $\boldsymbol{m}$ dan melalui titik $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ dirumuskan: $\boldsymbol{y - y_1 = m(x = x_1\,)}$

Suatu fungsi sembarang $\boldsymbol{y = f(x)}$ yang dapat digambarkan oleh gambar berikut ini



Gambar 6.2. Grafik Fungsi $\boldsymbol{y = f(x)}$

Apabila kita turunkan fungsi $\boldsymbol{f(x)}$ tersebut, maka yang akan kita peroleh adalah kemiringan dari fungsi $\boldsymbol{f(x)}$ untuk setiap nilai $\boldsymbol{x}$. Dengan kata lain, kemiringan fungsi $\boldsymbol{f(x)}$ ketika $\boldsymbol{x = a}$ akan bernilai sebesar ***f'*(*a*)**, dan ketika ***x* = *b***, nilainya akan sebesar ***f'*(b)**, dan seterusnya, seperti pada gambar berikut



Gambar 6.3. Grafik Fungsi ***y* = *f*(*a*)*x* +*c***

Dimana dua garis lurus yang baru tepat bersinggungan dengan kurva ***f*(x)** sehingga kemiringan kedua garis tersebut adalah ***f'*(*a*)** dan ***f'*(b).**

Nilai dari c_a dapat ditentukan dengan mensubstitusikan ***y*** dengan ***f*(*a*),** mengingat ***y* = *f*(*a*)** pada ***x* = *a***. Dengan demikian kita peroleh hubungan

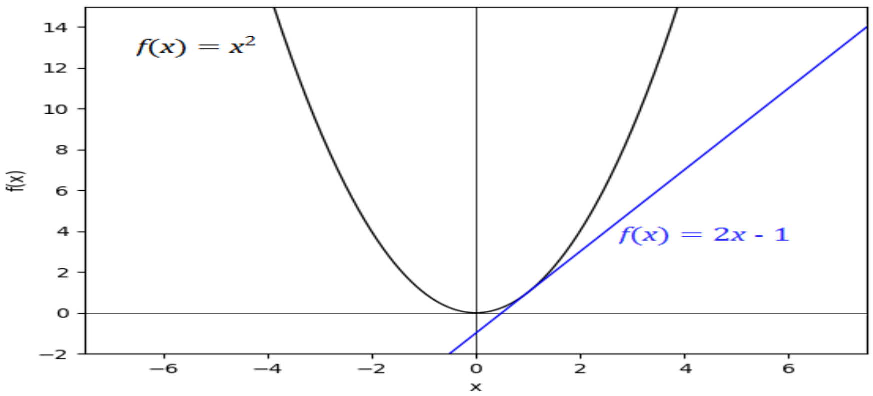
$$\boldsymbol{c_a = f(a) - f'(a)a}$$

Sehingga kita peroleh persamaan garis singgung di titik ***x* = *a*** adalah

$$\boldsymbol{y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a}$$
$$\boldsymbol{y = f'^{(a)}(x - a) + f(a)}$$

Sebagai contoh, kita akan meninjau fungsi kuadrat sederhana, yaitu ***f*(x) = x²**, sehingga ***f'*(x) = 2*x***. Maka persamaan garis singgung di titik *a* dapat dituliskan sebagai:

$$\boldsymbol{y = 2a(x - a) + a^2}$$
$$\boldsymbol{y = 2ax - a^2}$$

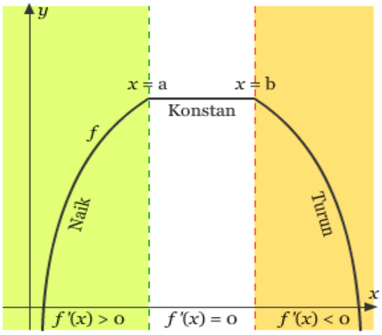


Misal, untuk $a = 1$, maka $\boldsymbol{y = 2x - 1}$

Gambar 6.4. Grafik Hasil Fungsi ***f(x)* = 2*x* – 1**

b. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Suatu fungsi dikatakan naik jika $\boldsymbol{x}$ bergerak ke kanan, grafik fungsi tersebut bergerak ke atas, dan turun jika grafik fungsi tersebut bergerak ke bawah. Sebagai contoh, fungsi di samping naik pada selang $(\boldsymbol{-\infty, a})$, konstan pada selang $(\boldsymbol{a, b})$, dan turun pada selang $(\boldsymbol{b, \infty})$



Gambar 6.5. Grafik Fungsi Naik – Fungsi Turun

Syarat:

$$\boldsymbol{y = f(x)}\begin{cases} \boldsymbol{naik} \text{ **jika** } \boldsymbol{f'(x) > 0} \\ \boldsymbol{turun} \text{ **jika** } \boldsymbol{f'(x) < 0} \end{cases}$$

Teorema Uji Fungsi Naik dan Turun

Misalkan f adalah fungsi yang kontinu pada selang tutup [a, b] dan terdiferensialkan pada selang buka (a, b).

5. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f naik pada $[a, b]$.
6. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f turun pada $[a, b]$.
7. Jika $f'(x) = 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f konstan pada $[a, b]$.

Contoh:

Kasus 1: Untuk membuktikan kasus pertama, anggap bahwa $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam selang (a, b) dan ***misalkan*** $x_1 < x_2$ adalah sembarang dua titik dalam selang tersebut. Berdasarkan Teorema Nilai Rata-Rata, kita tahu bahwa ada suatu bilangan **c** sedemikian sehingga $x_1 < c < x_2$, dan

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

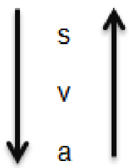
Karena $f'(c) > 0$ dan $x_2 - x_1 > 0$, maka $f(x_2) - f(x_1) > 0$, yang mengakibatkan bahwa $f(x_1) < f(x_2)$. Jadi, f naik pada selang tersebut.

c. Jarak, Kecepatan, Percepatan

Pertama-tama kita kan tahu bahwa rumus kecepatan adalah perubahan jarak terhadap waktu dan percepatan adalah perubahan kecepatan terhadap waktu. Perhatikan bahwa kecepatan adalah jarak dibagi waktu, dan percepatan adalah kecepatan dibagi waktu. *Seakan-akan kayak turun gitu dibagi-bagi terus sama waktu.* Dan memang kenyataannya itu.

"*Kecepatan adalah turunan jarak terhadap waktu dan Percepatan adalah turunan kecepatan terhadap waktu.*"

Kebalikan dari turunan adalah naikkan. Beneran gak ngelawak beberapa orang panggilnya gitu. Nama yang lebih lazim adalah integral. Maka jarak adalah integral dari kecepatan dan kecepatan adalah integral dari percepatan.



Gambar disamping ini menunjukkan kalau kalian ingin mencari kecepatan bisa diturunkan dari jarak. Kalau ingin mencari percepatan bisa dengan menurunkan kecepatan. Kalau ingin mencari jarak bisa meng-integralkan kecepatan. turunan bisa dirumuskan seperti ini:

$$Jika\ y = ax^n, maka$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = nax^{n-1}$$

dy/dx dan y' hanyalah penulisan lain dari turunan. *Inti dari turunan (nama lainnya diferensial) hanya "menurunkan pangkat" suatu fungsi.*

Contoh soalnya begini:

1. $Jika\ y = 3x^5 - 74x + 69, maka$

   $\frac{dy}{dx} = y' = 15x^4 - 74$

2. $Jika\ y = \frac{2a}{3}x^6 + 4b,\ maka$

   $\frac{dy}{dx} = y' = 4ax^5$

Dalam integral akan dituliskan menjadi:

$$Jika\ y = ax^n, maka$$

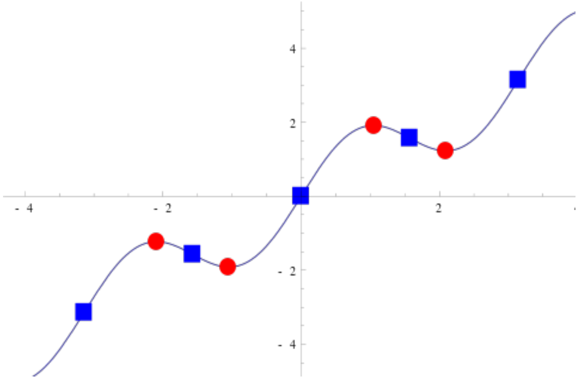
$$\int ax^n\, dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

Maka Persamaannya akan dituliskan menjadi:

$$\boldsymbol{y = S(x)} \begin{cases} \boldsymbol{S(x)\ jarak} \\ \boldsymbol{S'(x)\ kecepatan} \\ \boldsymbol{S''(x)\ percepatan} \end{cases}$$

d. Stasioner, Maksimum, Minimum dan Belok

Titik Stasioner atau **Titik Kritis** suatu fungsi yang dapat diturunkan adalah suatu titik di dalam grafik dengan turunan kurva pertama, dalam kata lain, titik stasioner merupakan titik di mana fungsi "berhenti" naik atau turun.



Gambar 6.6. Penggambaran Titik Stasioner

Titik stasioner ditunjukkan dengan lingkaran merah. Di dalam grafik ini, titik-titiknya merupakan maksima atau minima relatif. Kotak berwarna biru merupakan titik belok.

Kondisi suatu grafik fungsi $\boldsymbol{y = f(x)}$ mempunyai **tiga keadaan**, yaitu keadaan naik (**kurva fungsi naik**), keadaan turun (**kurva fungsi turun**), dan keadaan diam (**kurva fungsi stasioner**). Kali ini, kita akan membahas mengenai kondisi suatu fungsi ketika dalam keadaan diam (stasioner) beserta perluasannya.

Fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ stasioner jika $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$

Untuk sebarang titik $\boldsymbol{(x_0 , f (x_0))}$ dengan $\boldsymbol{f '(x_0) = 0}$ maka titik $\boldsymbol{(x_0 , f (x_0))}$ disebut titik- titik stasioner. Titik stasioner dapat berupa: titik balik maksimum, titik balik minimum, atau titik belok.

- Titik Balik Maksimum
  Syarat: $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$
  $f (x_0)$ = Nilai Maksimum, $\boldsymbol{(x_0 , f (x_0))}$ = titik balik maksimum
- Titik Balik Minimum
  Syarat $\boldsymbol{f ''(x0) > 0}$
  $f (x_0)$ = nilai minimum, $(x_0, f (x_0))$ = titik balik minimum

$f(x_0)$ = nilai minimum, $(x_0, f(x_0))$ = titik balik minimum

- Titik Belok

  Syarat: **$f''(x0) = 0$**

  $f(x_0)$ = nilai belok, $(x_0, f(x_0))$ = titik belok

6.3 Kesimpulan

Turunan fungsi (diferensial) adalah fungsi lain dari suatu fungsi sebelumnya, misalnya fungsi f menjadi f' yang mempunyai nilai tidak beraturan. Turunan pertama fungsi f di $x = a$ ditulis $f'(a)$ didefinisikan dengan:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Turunan tidak hanya bisa diperoleh dengan menggunakan cara limit, tetapi bisa juga diperoleh dengan menggunakan beberapa rumus seperti aljabar dan trigonometri.

Tugas dan Latihan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti

1. $f(x) = 4 - x^2;\ f'(-3), f'(0), f'(1)$
2. $F(x) = (x-1)^2 + 1;\ F'(-1), F'(0), F'(2)$
3. $g(t) = \frac{1}{t^2};\ g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$
4. $k(z) = \frac{1-z}{2z};\ k'(-1), k'(12), k'(\sqrt{2})$
5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta};\ p'(1),\ p'(3), p'\left(\frac{2}{3}\right)$
6. $r(s) = \sqrt{2s+1};\ r'(0),\ r'(1), r'\left(\frac{1}{2}\right)$

Carilah turunan pertama atau y' dari:

1. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$
2. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$
3. $y = (1 - x)^x(2x + 3)$
4. $\sqrt[4]{(2x^2 - 3)^3}$

Diberikan fungsi naik $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$, tentukan interval nilai x dimana f turun dan f naik.

Tentukan nilai minimum $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$ pada interval $-3 < x < 4$.

Dari karton berbentuk persegi dengan *sisi c* cm akan dibuat sebuah kotak tanpa tutup dengan cara mengunting empat persegi di pojoknya sebesar h cm. Tentukan nilai h agar volume kotak maksimum.

Referensi

Rifa'i, M. (2020). Kalkulus Diferensial (Limit, Turunan, Dan Aplikasi Turunan). Deepublish.

Hayati, L., & Romdhini, M. U. (2012). Kalkulus Diferensial dan Integral Oleh Fermat. Jurnal Pijar Mipa, 7(1).

BAB VII
INTEGRAL

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah: **mampu memahami dan menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan integral.**

Bahan kajian pembelajaran pada bab ini adalah penjelasan secara komprehensif tentang **Integral dari suatu fungsi linear, Integral tak tentu, Integral tentu**.

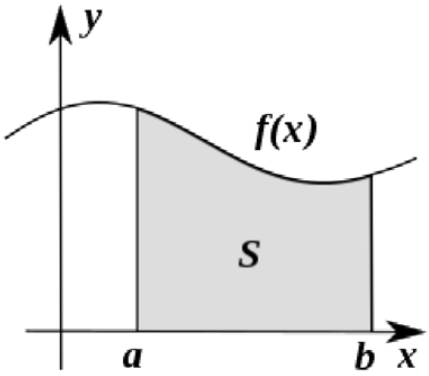
Sub capaian pembelajaran mata kuliah dalam dalam pertemuan ini adalah **mahasiswa diharapkan Mampu menghitung dan menggunakan integral .**

Indikator pencapaian dalam pertemuan ini adalah mahasiswa dapat **Menentukan hasil pengintegralan, penggunaan teknik integral parsial dan substitusi, menentukan hasil pengintegralan bentuk pangkat dan perkalian sinus dan cosinus, menghitung luas daerah dengan integral, menghitung volume benda putar, Panjang kurva dengan dan panjang busur.**

Penyampaian materi adalah dengan **ceramah, diskusi, dan praktek**

Definisi Integral

Integral secara sederhana dapat disebut sebagai invers (kebalikan) dari operasi turunan. Integral dibedakan menjadi dua yaitu integral tak tentu dan integral tentu.



Gambar 7.1. Grafik Integral

Integral tak tentu merujuk pada definisi integral sebagai invers (kebalikan) dari turunan, sedangkan integral tentu didefinisikan sebagai jumlahan suatu daerah yang dibatasi kurva atau persamaan tertentu.

Integral dapat dianggap sebagai perhitungan luas daerah di bawah kurva *f*(x), antara dua titik a dan b.

7.1 Penerapan Integral

Integral dimanfaatkan dalam berbagai bidang. Pada bidang matematika dan teknik, integral digunakan untuk menghitung volume benda putar dan luasan pada kurva.

Pada bidang fisika, pemanfaatan integral digunakan untuk menghitung dan menganalisis rangkaian arus listrik, medan magnet, dan lainnya.

Dalam bidang ekonomi, integral digunakan untuk menentukan persamaan dan fungsi yang berkaitan dengan ekonomi, konsumsi, marginal, dan sebagainya. Berikut akan dijelaskan mengenai rumus integral dasar/sederhana.

7.2 Rumus Integral

Misalkan terdapat suatu fungsi sederhana ax^n. Integral dari fungsi tersebut adalah

$$\int kx^n \, dx = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + C$$

Keterangan:

- k: koefisien
- x: variabel
- n: pangkat/derajat dari variabel
- C: konstanta

Misalkan terdapat suatu fungsi *f(x)*. Jika kita akan menentukan luas daerah yang dibatasi oleh grafik *f*(*x*) maka dapat ditentukan dengan

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

dengan a dan b merupakan gari vertikal atau batas luasan daerah yang dihitung dari sumbu-x. Misalkan integra dari *f*(*x*) disimbolkan dengan F(*x*) atau jika dituliskan

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Keterangan:

- a, b: batas atas dan batas bawah integral
- f(x): persamaan kurva
- F(x): luasan di bawah kurva f(x)

7.3 Sifat Integral

Beberapa sifat integral yaitu sebagai berikut.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Jika a < b < c, maka

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Integral Tak Tentu

Seperti yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya, integral tak tentu merupakan suatu kebalikan dari turunan. Kalian dapat menyebutnya sebagai anti turunan atau antiderivative.

Integral tak tentu dari suatu fungsi menghasilkan fungsi baru yang belum memiliki nilai yang tentu karena masih terdapat variabel dalam fungsi baru tersebut. Bentuk umum integral tentu

$$\int f(x)\ dx.$$

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

Keterangan:

- f(x): persamaan kurva
- F(x): luasan di bawah kurva f(x)
- C: konstanta

Contoh integral tak tentu:

$$\int 3x^2 - 2x + 2\ dx = \frac{3}{2+1}x^{2+1} - \frac{2}{1+1}x^{1+1} + \frac{2}{1}x^{0+1} + C = x^3 - x^2 + 2x + C$$

Integral Tentu

Integral tentu didefinisikan sebagai jumlahan suatu daerah yang dibatasi kurva atau persamaan tertentu.

Berbeda dari integral tak tentu, integral tentu memiliki nilai tertentu karena batas yang ditentukan sudah jelas.

Secara umum, integral tentu didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Keterangan:

- f(x): persamaan kurva
- a, b: batas bawah dan batas atas integral
- F(b), F(a): nilai integral untuk x = b dan x = a.

Kalo masih belum paham, yuk nonton video rumus pintar tentang integral tentu di bawah ini ya.

Integral Pecahan

Fungsi pecahan dapat didefinisikan sebagai f(x)/g(x). Penyelesaian integral fungsi pecahan dapat dilakukan dengan memecah fungsi yang kompleks menjadi beberapa fungsi yang lebih sederhana. Perhatikan contoh berikut.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$$

Penyelesaian integral tersebut yaitu sebagai berikut.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\, dx$$

Fungsi pecahan tersebut dapat dipisah menjadi

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$(A + B)\, x + B - A = 1$$

Sehingga

$$B - A = 1, \text{ dan } A + B = 0$$

Didapatkan B = ½ dan A = − ½

Maka, dengan menggunakan sifat integral diperoleh

$$\int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int -\frac{1}{x+1}\, dx + \int \frac{1}{x-1}\, dx\right)$$

$= \frac{1}{2}\left(-\ln|x+1| + \ln|x-1| + C_1\right)$

$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$, dengan $C = \frac{1}{2} C_1$

Selanjutnya akan dibahas mengenai integral eksponensial.

Integral Eksponensial

Fungsi eksponensial biasanya dinotasikan dengan e^x. Beberapa konsep dasar yang harus dipelajari dalam integral eksponensial yaitu

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int e^{kx} = \frac{1}{k} e^x + C$$

$$\int k^x \, dx = \frac{k^x}{\ln k} + C$$

Keterangan:

- e^x, e^{kx}: fungsi eksponensial
- C: konstanta

Selanjutnya akan dibahas mengenai integral substitusi.

Integral Substitusi

Beberapa permasalahan atau integral suatu fungsi dapat diselesaikan dengan integral substitusi jika terdapat perkalian fungsi dengan salah satu fungsi merupakan turunan fungsi yang lain.

Perhatikan contoh berikut.

$$\int 2x \ \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) \, dx$$

Kita misalkan $U = ½ x^2 + 3$ maka $dU/dx = x$

Sehingga $x \, dx = dU$

Persamaan integral substitusinya menjadi

$$\int 2x \ \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) \, dx = \int 2 \sin U \, dU$$

$= -2 \cos U + C = -2 \cos (½ x^2 + 3) + C$

Berikutnya akan dijelaskan mengenai integral parsial.

Integral Parsial

Integral parsial biasa digunakan untuk menyelesaikan integral dari perkalian dua fungsi. Secara umum, integral parsial didefinikan dengan:

$$\int U \,.\, dV = UV - \int V \,.\, dU$$

Keterangan:

U, V : fungsi

dU, dV : turunan dari fungsi U dan turunan dari fungsi V

Berikut disajikan beberapa bentuk integral tak tentu yang lain.

Tabel 7.1. Integral Fungsi dan Hasil Integral

Integral Fungsi	Hasil Integral
$\int \sin x \, dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x \, dx$	$\sin x + c$
$\int \tan x \, dx$	$\ln\lvert\sec x\rvert + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$arc \sin x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	$arc \tan x + c$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx$	$arc \sec x + c$
$\int \sinh x \, dx$	$\cosh x + c$
$\int \cosh x \, dx$	$\sinh x + c$

Contoh Soal Integral

Selesaikan integral berikut:

1. $\int (x+2)(x-1)\ dx$
2. $\int \frac{1}{x^2-x-6}\ dx$
3. $\int x\, e^{-x}\ dx$
4. $\int \sin x \cos^3 x\ dx$
5. $\int_1^2 x^2 + 3\ dx$

Penyelesaian:

1. $\int (x+2)(x-1)\ dx = \int x^2 + x - 2\ dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

2. $\int \frac{1}{x^2-x-6}\ dx$

   1/(x^2 − x + 6) = 1/((x − 3)(x + 2)) = A/(x − 3) + B/(x + 2)
   A(x + 2) + B (x − 3) = 1
   (A + B) x + 2A − 3B = 1
   Diperoleh A = 1/5 dan B = − 1/5

   $$\int \frac{1}{x^2-x-6}\ dx = \frac{1}{5}\left(\int \frac{1}{x-3}\ dx - \int \frac{1}{x+2} dx\right)$$

   = 1/5 (ln |x − 3| + C_1 − ln |x + 2| − C_2) = 1/5 ln |x − 3| − 1/5 ln |x + 2| + C, dengan C = 1/5 C_1 − 1/5 C_2

3. $\int x\, e^{-x}\ dx$, dapat diselesaikan dengan menggunakan integral parsial.

   Misal:
   u = x maka du = dx
   dv = e^x dx maka v = $\int e^x\ dx = e^x$
   Sehingga

   $\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$

   $= x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + V = e^x (x - 1) + C$

4. $\int \sin x \cos^3 x \ dx$

Misal:

u = cos x maka du = − sin x, dengan menggunakan konsep integral substitusi diperoleh:

$\int \sin x \cos^3 x \ dx = \int -u^3 \ du = -\frac{1}{4} u^4 + C = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

5. $\int_1^2 x^2 + 3 \ dx$

$1/3\ x^3 + 3x + C$ dengan batas atas 2 dan batas bawah 1, sehingga:

$= (1/3\ (2)^3 + 3\ (2)) - (1/3\ (1)^3 + 3\ (1))$

$= (8/3) + 6 - 1/3 - 3$

$= 16/3$

7.4 Kesimpulan

1. Integral secara sederhana dapat disebut sebagai invers (kebalikan) dari operasi turunan.
2. Integral dibedakan menjadi dua, yaitu integral tak tentu dan integral tentu.
3. Beberapa bentuk dan teknik penyelesaian integral yaitu
   a) Integral pecahan
   b) Integral eksponensial
   c) Integral substitusi
   d) Integral parsial

Tugas dan Latihan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini dengan teliti

1. Hitunglah integral dari $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$!
2. Diketahui fungsi y = f(x) memiliki f '(x) = 4x + 6. Misal kurva y = f(x) melalui titik (2, 8). Tentukan persamaan kurva tersebut.
3. Hitunglah integral dibawah ini dengan memilih substitusi yang ditunjukkan!

   $\int \boldsymbol{2x^2(x^3-1)^{17}\,dx\,;\ u = x^3+1}$

   $\int \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}\,dx\,;\ u = \sqrt{x}}$
4. Tentukan integral dari $\sin^4 x \cos x$!

Referensi:

Rifa'i, M. (2020). Kalkulus Diferensial (Limit, Turunan, Dan Aplikasi Turunan). Deepublish.

Rosyadi, A. A. P. (2020). Kalkulus Integral (Vol. 1). UMMPress.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., Bivens, I. C., & Davis, S. (2021). Calculus. John Wiley & Sons.

Avez, A. (2020). Differential calculus. Courier Dover Publications.

Dedy, E., Sumiaty, E., & Juandy, D. (2020). Kalkulus: Jilid 1. Bumi Aksara.

Grattan-Guinness, I. (Ed.). (2020). From the calculus to set theory 1630-1910: An introductory history. Princeton University Press.

Hakim, A. R., & Mulyatna, F. (2023). Sejarah Matematika: Perkembangan Bilangan Matematika Empiris. Diskusi Panel Nasional Pendidikan Matematika, 9.

Henra, K., Asnita, A. U., Riaddin, D., Resi, B. B. F., Setiawan, J., & Dahlan, T. (2021). Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar. Yayasan Penerbit Muhammad Zaini.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., & McCallum, W. G. (2020). Calculus: Single and multivariable. John Wiley & Sons.

Iswadi, H., Asmawati, E., Juliana, J. R., Kartikasari, F. D., Siswantoro, J., & Herlambang, A. (2021). Kalkulus: Edisi Revisi. Media Nusa Creative (MNC Publishing).

Kidron, I. (2020). Calculus teaching and learning. Encyclopedia of mathematics education, 87-94.

Meilasari, V., & Handayani, R. (2019). kalkulus Integral; Tekhnik Pengintegralan.

Misbah, M. (2022). Persamaan Differensial Matematika Fisika.

Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. ZDM–Mathematics Education, 53(3), 621-633.

Murtafiah, W., & Apriandi, D. (2018). Persamaan Diferensial Biasa Dan Aplikasinya.

Novika, F. (2023). KALKULUS DASAR. Penerbit Tahta Media.

Rahmani-Andebili, M. (2023). Calculus I: Practice Problems, Methods, and Solutions. Springer Nature.

Razali, M., Ir Arman Sani, M. T., Ir M Zulfin, M. T., Rahayu, I. T., Siregar, M. N., & Marpaung, F. (2021). Kalkulus Diferensial: Edisi Revisi. umsu press.

Rifa'i, M. (2020). Kalkulus Diferensial (Limit, Turunan, Dan Aplikasi Turunan). Deepublish.

Rosyadi, A. A. P. (2020). Kalkulus Integral (Vol. 1). UMMPress.

Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2021). Calculus: One and several variables. John Wiley & Sons.

Strang, G. (2020). Calculus v1. OpenStax.

Sudaryono, I. (2017). Kalkulus Diferensial Teori & Aplikasi. Prenada Media.

Sumartini, T. S., Puspitasari, N., & Nuraeni, R. (2023). KALKULUS DIFERENTIAL DAN INTEGRAL.

Suryawan, H. P. (2020). kalkulus diferensial. Sanata Dharma University Press.

Weisstein, Eric W. "Function", 2023

INDEKS

GLOSARIUM

A

Akar, bentuk pecahan eksponen dan dinotasikan: $\sqrt[n]{\ldots}$.

Aljabar, ilmu yang mempelajari simbol-simbol matematika dan aturan untuk memanipulasi simbol-simbol ini;

Aljabar abstrak, bidang subjek matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, gelanggang, medan, modul, ruang vektor, dan aljabar medan.

Aljabar elementer, bentuk fundamental dan dasar dari aljabar, yang diajarkan kepada murid yang dianggap sedikit atau tidak memiliki pengetahuan tentang matematika yang lebih jauh daripada aritmetika (berhitung).

Aljabar linear, bidang studi matematika yang mempelajari system persamaan linear dan solusinya, vektor, serta transformasi linear.

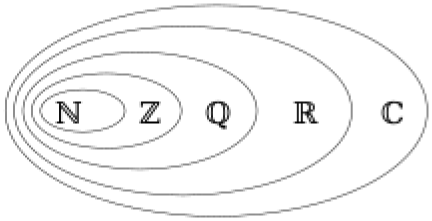
Analisis matematis,

Analisis kompleks, cabang yang membahas bilangan kompleks beserta fungsi bervariabelkan bilangan kompleks. Analisis riil, lih. Analisis riil Analisis riil, merupakan cabang dari analisis matematika yang membahas himpunan bilangan riil, fungsi riil, serta barisan dan deret bilangan riil.

Argumen,

B

Barisan, urutan yang memuat anggota atau suku.



Himpunan bilangan-bilangan.

Bilangan, suatu konsep matematika yang digunakan dalam pencacahan dan pengukuran, yang lazimnya memakai angka sebagai mewakilinya.

Bilangan aljabar, bilangan yang kemungkinan termasuk bilangan kompleks yang merupakan akar dari suatu suku banyak tak-nol hingga satu variabel dengan koefisien bilangan rasional.

Bilangan bulat, bilangan yang dituliskan dalam notasi pencirian himpunan: { ... -2, -1, 0, 1, 2, ... } dan dilambangkan Z sebagai himpunan bilangan bulat.

Bilangan cacah, bilangan yang dituliskan dalam notasi pencirian himpunan: {0,1,2,3, ... } dan dilambangkan W sebagai himpunan bilangan cacah.

Bilangan imajiner, bilangan berupa akar dari negatif 1. Dinotasikan $\boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}$

Bilangan irasional, kebalikan dengan bilangan irasional, dimana desimalnya berbuntut tiada jeda.

Bilangan kompleks, gabungan dari bilangan riil dan bilangan imajiner, dan dilambangkan C sebagai himpunan bilangan kompleks.

Bilangan komposit, kebalikan bilangan prima, bilangan yang tidak hanya dibagi oleh 1 dan dirinya sendiri, tetapi juga oleh bilangan lainnya.

Bilangan khayal, lih. Bilangan imajiner

Bilangan prima,.bilangan yang hanya bisa dibagi oleh 1 dan dirinya sendiri.

Bilangan rasional, bilangan yang mana desimalnya berulang datau berhenti dan dilambangkan Q sebagai himpunan bilangan rasional.

Bilangan riil, lih. Bilangan riil

Bilangan riil, bilangan yang mencakup semua bilangan, di antaranya, bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional, dan bilangan irasional. Himpunannya dilambangkan R.
Bilangan transendental, bilangan riil atau kompleks yang bukan merupakan bilangan aljabar

E

Eksponen, bilangan yang menunjukkan pangkat atau perulangan dari suatu bilangan. Dalam matematika, eksponen digunakan untuk menggambarkan pengulangan atau pemangkatan bilangan. lih. Eksponensiasi
Eksponensiasi, operasi yang melibatkan dua bilangan, yaitu bilangan pokok dan pangkat..

F

Fungsi, pemetaan setiap anggota sebuah himpunan (dinamakan sebagai domain atau variabel bebas) kepada anggota himpunan yang lain (dinamakan sebagai kodomain atau variabel terikat) yang dapat dinyatakan dengan lambang $\boldsymbol{f(x)}$.

G

Gabungan, himpunan dari semua anggota dari kumpulan tersebut.
Grup, suatu himpunan, beserta satu operasi biner, seperti perkalian atau penjumlahan yang memenuhi beberapa aksioma yang disebut *aksioma grup*.

H

Himpunan, kumpulan objek yang memiliki sifat yang dapat didefinisikan dengan jelas, atau lebih jelasnya adalah segala koleksi benda-benda tertentu yang dianggap sebagai satu kesatuan.
Hipotesis, jawaban sementara terhadap masalah yang masih bersifat praduga karena masih harus dibuktikan kebenarannya.

I

Integral, kebalikan dari turunan, yang memiliki penerapan (dalam integral tentu) untuk mencari panjang kurva, luas dan volume daerah.

Irisan, (pada sebuah himpunan A dan B), himpunan dengan anggota himpunan A dan juga himpunan B.

K

Kalkulus, cabang matematika yang mempelajari perubahan suatu fungsi. Kalkulus meliputi topik berupa limit, turunan, integral, dan deret. Kalkulus yang mempelajari vektor disebut kalkulus vektor.

Kalkulus vektor, cabang kalkulus yang mempelajari vektor.

Kombinatorik, cabang matematika yang mempelajari cara menghitung dan menganalisis permutasi, kombinasi, dan himpunan. Ini melibatkan studi tentang cara memilih, mengatur, dan menggabungkan objek-objek dalam berbagai situasi.

Kombinatorika, cabang matematika yang membahas sifat-sifat dan cara menghitung struktur-struktur terhingga. Kombinatorika berkaitan erat dengan cabang-cabang matematika lain, dan memiliki banyak penerapan di ilmu logika sampai biologi evolusioner sampai ilmu komputer.

L

Lapangan, lih. Medan

Lema, adalah sebuah proposisi atau pernyataan yang digunakan untuk pembuktian pernyataan lainnya.

Logaritma, fungsi bilangan positif yang merupakan invers dari eksponen atau eksponensiasi. Logaritma dinotasikan ke dalam $^{b}\mathbf{log}\,\boldsymbol{x}$ atau $\mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{x}$.

Logaritma alami, logaritma dengan basis e .

Logaritma biner, logaritma dengan basis 2 .

Logaritma Napier, logaritma yang mendasari logaritma alami (logaritma basis e) yang ditemukan oleh John Napier pada abad ke-17. Logaritma Napier sering kali disebut sebagai "logaritma desimal" karena digunakan untuk menghitung logaritma basis 10 dari suatu angka. Logaritma Napier, yang biasanya dilambangkan sebagai "ln(x)", adalah kebalikan dari fungsi eksponensial natural yaitu "e^x". Dengan kata lain, jika kita memiliki nilai x, maka logaritma Napier dari x memberikan eksponen yang perlu kita gunakan pada bilangan e untuk mendapatkan nilai x. Secara matematis, logaritma Napier dari suatu bilangan x dapat ditentukan sebagai berikut:

ln(x) = y ⇔ e^y = x

Di sini, log_e(x) menunjukkan logaritma dengan dasar e dari x. Logaritma Napier digunakan dalam berbagai bidang matematika, ilmu pengetahuan alam, dan teknik, terutama dalam perhitungan yang melibatkan pertumbuhan eksponensial, perhitungan suku bunga majemuk, dan masalah yang melibatkan perkalian dan pembagian yang berulang.

Logaritma natural, lih. Logaritma alami

M

Matematika murni, cabang bidang matematika yang mempelajari tentang bidang itu sendiri. Contohnya, seperti kalkulus, analisis riil, analisis kompleks, teori bilangan, dan lain sebagainya.

Matematika terapan, cabang bidang matematika yang menerapkan matematika murni ke bidang lainnya. Contohnya, statistika, peluang, dan lain sebagainya.

Medan, suatu struktur aljabar dengan operasi seperti penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian yang memenuhi aksioma tertentu.

N

Nol, 0 adalah suatu angka dan digit angka yang digunakan untuk mewakili angka dalam angka. Angka nol memainkan peranan penting dalam matematika sebagai identitas tambahan bagi bilangan bulat, bilangan riil, dan struktur aljabar lainnya. Sebagai angka, nol digunakan sebagai tempat dalam sistem nilai tempat.

Notasi kapital Pi, bentuk abreviasi dari perkalian yang sangat panjang. Notasi ini disimbolkan dalam huruf kapital Yunani π, mirip dengan notasi Sigma.

Notasi Sigma, bentuk abreviasi dari penjumlahan yang sangat panjang. Notasi ini disimbolkan dalam huruf kapital Yunani, ∑. Sebagai contoh, $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_1} + \cdots . + \boldsymbol{a_n}$ yang menunjukkan bahwa indeks pada penjumlahannya dimulai dari 1 hingga .

P

Pembagian, salah satu dari empat operasi aritmetika yang merupakan kebalikan dari perkalian.
Penambahan, bilangan yang ditambahkan dengan bilangan lain, yang disimbolkan sebagai +.
Pengurangan, invers dari penambahan, yang disimbolkan sebagai − .
Penjumlahan, penambahan setiap bilangan sehingga hasilnya menjadi jumlah atau totalnya.
Perkalian, salah satu dari empat dasar operasi matematika dari aritmetika yang merupakan penjumlahan berulang. Perkalian disimbolkan × atau.
Peubah, lih. Variabel

Q

Q.E.D., merupakan abreviasi dari *quod erat demonstrandum* yang berarti "yang sudah dibuktikan" atau "yang sudah terbukti". Abreviasi ini terdapat di akhir dari pembuktian matematika atau argumen filosofi sebagai pernyataan terakhir dari sesuatu yang telah dibuktikan.[9]

S

Segitiga, bangunan berdimensi dua yang memiliki tiga sisi dan tiga sudut.
Segitiga siku-siku, segitiga yang memiliki sudut 90 derajat dan kedua sudut lainnya memiliki sudut 45 derajat.
Statistika, sebuah ilmu yang mempelajari bagaimana cara merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, lalu menginterpretasikan, dan akhirnya mempresentasikan data. Singkatnya, statistika adalah ilmu yang bersangkutan dengan suatu data.

T

Trigonometri, cabang matematika yang mempelajari sudut terhadap segitiga siku-siku.

Turunan, topik kalkulus yang mempelajari perubahan pada fungsi.

V

Variabel, nilai yang dapat berubah dalam suatu cakupan soal atau himpunan operasi yang diberikan. Sebaliknya, konstanta adalah nilai yang tidak berubah, meskipun sering kali tidak diketahui atau tidak ditentukan

Kalkulus & Analisis Tabel Simbol Matematika

Simbol	Nama Simbol	Arti / definisi	Contoh
$\lim_{x \to x0} f(x)$	membatasi	nilai batas suatu fungsi	
ε	epsilon.dll	mewakili angka yang sangat kecil, mendekati nol	$\varepsilon \to 0$
e	e konstanta / bilangan Euler	e = 2,718281828 ...	$e = \lim (1 + 1 / x)^x, x \to \infty$
y'	turunan	derivatif - notasi Lagrange	$(3x^3)' = 9x^2$
y''	turunan kedua	turunan dari turunan	$(3x^3)'' = 18x$
$y^{(n)}$	turunan ke-n	n kali derivasi	$(3x^3)^{(3)} = 18$
$\frac{dy}{dx}$	turunan	derivatif - notasi Leibniz	$d(3x^3) / dx = 9x^2$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	turunan kedua	turunan dari turunan	$d^2(3x^3) / dx^2 = 18x$
$\frac{d^ny}{dx^n}$	turunan ke-n	n kali derivasi	
$\dot{y}$	turunan waktu	turunan oleh waktu - notasi Newton	
$\ddot{y}$	waktu turunan kedua	turunan dari turunan	
$D_x y$	turunan	derivative - notasi Euler	
$D_x^2 y$	turunan kedua	turunan dari turunan	

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$	turunan parsial		$\partial (x^2 + y^2) / \partial x = 2x$
$\int$	integral	berlawanan dengan derivasi	
$\iint$	integral ganda	integrasi fungsi dari 2 variabel	
$\iiint$	tiga integral	integrasi fungsi dari 3 variabel	
$\oint$	integral kontur / garis tertutup		
$\oiint$	integral permukaan tertutup		
$\oiiint$	integral volume tertutup		
$[a, b]$	interval tertutup	$[a, b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$	
(a, b)	interval terbuka	$(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$	
i	unit imajiner	$saya \equiv \sqrt{}\ -1$	$z = 3 + 2i$
z *	konjugasi kompleks	$z = a + bi \rightarrow z^* = a - bi$	$z^* = 3 + 2i$
z	konjugasi kompleks	$z = a + bi \rightarrow z = a - bi$	$z = 3 + 2i$
Re (z)	bagian nyata dari bilangan kompleks	$z = a + bi \rightarrow \text{Re}(z) = a$	Re (3 - 2 i) = 3
Im (z)	bagian imajiner dari bilangan kompleks	$z = a + bi \rightarrow \text{Im}(z) = b$	Im (3 - 2 *saya*) = -2
$\lvert z \rvert$	nilai absolut / besarnya bilangan kompleks	$\lvert z \rvert = \lvert a + bi \rvert = \sqrt{}\ (a^2 + b^2)$	$\lvert 3 - 2\, saya \rvert = \sqrt{}13$

arg (z)	argumen dari bilangan kompleks	Sudut jari-jari pada bidang kompleks	arg (3 + 2 i) = 33,7 °
∇	nabla / del	gradien / operator divergensi	$\nabla f (x , y , z)$
$\overrightarrow{x}$	vektor		
$\widehat{x}$	vektor satuan		
$x * y$	lilitan	$y (t) = x (t) * h (t)$	
$\mathcal{L}$	Transformasi Laplace	$F (s) = \mathcal{L}\{ f (t)\}$	
$\mathcal{F}$	Transformasi Fourier	$X (\omega) = \mathcal{F}\{ f (t)\}$	
δ	fungsi delta		
∞	lemniscate	simbol tak terhingga	