Matematika Ekonomi

by Andi Desfiandi

BAB I
D E R E T

1. Pengertian

Deret ialah rangkaian bilangan yang tersusun secara teratur. Bilangan-bilangan yang merupakan unsur dan pembentuk sebuah deret dinamakan suku. Keteraturan rangkaian bilangan yang membentuk sebuah deret terlihat pada pola perubahan bilangan-bilangan tersebut dari satu suku ke suku berikutnya.

Buku ini akan membahas penerapan ekonomi dari deret hitung dan deret ukur. Deret hitung ialah sebuah deret yang mempunyai pola perubahan dari suku tertentu ke suku selanjutnya sebesar bilangan tetap. Bilangan tersebut di namakan beda (b). Sedangkan deret ukur ialah suatu deret dengan perbandingan suku berurutan mempunyai nilai yang tetap. Nilai tetap tersebut dinamakan pembanding (p)

2. Deret Hitung

a. Kegunaan

Deret hitung dapat digunakan sebagai alat bantuh memecahkan persoalan-persoalan ekonomi, yaitu untuk menghitung perkembangan aktivitas yang mempunyai beda (b) antara aktivitas tertentu dengan aktivitas sesudahnya sebesar bilangan tetap tertentu. Aktivitas tersebut dapat berupa aktivitas di bidang produk, keuangan, biaya, harga dan sebagainya.

b. Rumus-Rumus

1. Beda = b = Sn – S (n-1)
2. Jumlah bilangan sampai suku ke-n :

   $Dn = \frac{n}{2} (a = Sn)$ atau $Dn = \frac{n}{2} \{2a = (n – 1)b\}$
3. Suku ke-n :

   $Sn = a = (n – 1)b$ atau $Sn = Dn – D(n – 1)$

Keterangan :

a= besarnya suku pertama atau S.
b= selisih antara nilai-nilai dua suku yang berurutan (beda).
n= banyaknya suku
Sn= besarnya atau nilainya suku ke – n
Dn= jumlah nilai-nilai sampai dengan suku ke – n.

c. Contoh Soal

1. Perusahaan Genteng SOKAJAYA menghasilkan 3000 buah genteng pada bulan pertama produksinya. Dengan penambahan tenaga kerja dan peningkatan produktivitas, perusahaan tersebut mampu menambah produksinya sebanyak 500 buah setiap bulan. Jika perkembangan produksinya konstan, maka hitunglah :
   a. Genteng yang di hasilkan pada bulan ke -5.
   b. Jumlah genteng yang dihasilkan sampai bulan ke -5.

Penyelesaian :

a. Sn = a = (n – 1)b

Suku pertama = a = 3000

Beda = b = 500

Banyaknya suku = n = 5

S5 =3000 = (5 – 1)500

S5 = 5.000 buah

b. Dn = n (a = Sn)

D5 = 5 (3000 + 5000)

D5 = 20.000 buah

2. Besarnya penerimaan PT CERMELANG dari hasil penjualan barangnya adalah Rp 720 juta pada tahun kelima dan Rp 980 juta pada tahun ketujuh. Jika perkembangan penerimaan berpola deret hitung, maka hitunglah :
   a. Nilai perkembangan penerimaan per tahun
   b. Besarnya penerimaan pada tahun pertama
   c. Pada tahun berapa penerimaan menjadi Rp 460 juta

   Penyelesaian :

   a. Perkembangan per tahun

   S7 = 980.000.000 _ _ _ _ a + 6b = 980.000.000

   S5 = 720.000.000 _ _ _ _ a + 4b = 720.000.000 (-)

   2b = 260.000.000

   b = 130.000.000

   Jadi perkembangan penerimaan tiap tahun=Rp 130.000.000

   b. Setelah perkembangan penerimaan tiap tahun diketahui, maka penerimaan pada tahun pertama dapat dihitung dengan cara memasukan perkembangan penerimaan tiap tahun (b) ke salah satu persamaan di atas :

   a + 4b = 720.000.000

   a + 4(130.000.000) = 720.000.000

   a + 520.000.000 = 720.000.000

   a = 720.000.000 – 520.000.000

   a = 200.000.000

   Jadi penerimaan pada tahun pertama adalah Rp 200juta.

   c. Tahun ke n ? penerimaan sebesar Rp 460.000.000

   Sn = a + (n – 1)b

   460.000.000 = 200.000.000 + (n – 1) 130.000.000

   460.000.000 = 200.000.000 + 130.000.000n – 130.000.000

   460.000.000 = 70.000.000 + 130.000.000n

   460.000.000 – 70.000.000 = 130.000.000n

   390.000.000 = 130.000.000n

   n = 390.000.000/130.000.000

   n = 3

3. Perusahaan sepatu “PATA” memproduksi 10.000 pasang sepatu pada tahun pertama operasinya. Namun karena situasi perekonomian yang tidak menguntungkan, produksinya terus menyusut 500 pasang setiap tahun. Hitunglah:
   a. Berapa produksinya pada tahun ke empat
   b. Berapa produksinya pada tahun ke limabelas
   c. Berapa yang telah diproduksi s.d. tahun kesepuluh

Penyelesaiaan :

a. $Sn = a + (n – 1)b$

Diketahui $a = 10.000$

$b = -500$

$S4 = 10.000 + (4 – 1) (-500)$

$= 8.500$ pasang sepatu

b. $S15 = 10.000 + (15 – 1) (-500)$

$= 3.000$ pasang sepatu

c. $D10= 10/2\ 2 (10.000) + (10.000\_1) (-500)$

$= 5 (20.000 – 4.500)$

$= 77.500$ sepasang sepatu

4. Perusahaan kecap NOMOR SATU memproduksi 24.000 botol kecap pada tahun ke -6 operasinya. Karena persaingan keras dari kecap-kecap merek lain, produksinya terus menerus secara konstan sehingga pada tahun ke -10 hanya memproduksi 18.000 botol. Diminta :

a. Berapa botol penurunan produksi per tahun.

b. Pada tahun keberapa perusahaan tidak beroprasi lagi (tutup).

c. Berapa botol kecap yang ia hasilkan selama oprasinya?

Penyelesaiaan :

a. $S6 = a + 5b = 24.000$

$S10= \underline{a + 9b = 18.000} \quad (-)$

$-4b = 6.000$

$b = -1500$

Jadi penurunan produksinya adalah 1500 botol per tahun.

b. $a + 5b = 24.000$

$a = 24.000 – 5b$

$a = 24.000 – 5 (-1500)$

$a = 31.500$

$Sn = a = (n – 1) b$

$S0= 31.500 + (n- 1) (-1500)$

$= 31.500 + 1500 – 1500n$

$1500n = 33.000$

$n = 22$ _ _ _ Jadi perusahaan tutup tahun ke -22

c. Jumlah seluruh kecap yang dihasilkan oleh pabrik kecap Nomor Satu selama operasinya (21 tahun) adalah :

$Dn = n/2 \{ 2a + (n – 1) b \}$

$D21= 21/2 \{ 2(315000) + (21 – 1) (-1500)\}$

$= 10,5 (63.000-30.000)$

$= 346.500$ botol

5. Perusahaan X memulai produksinya dengan 1000 unit dan berkurang 100 unit setiap tahun. Sedangkan perusahaan Y mengawali produksinya dengan 500 unit dan meningkat 25 unit setiap tahun. Diminta :

a. Pada tahun berapa produksi mereka sama jumlahnya

b. Kapan perusahaan X tutup

c. Berapa produksi nperusahaan Y pada tahun perusahaan X tutup.

Penyelesaiaan :

a. $ax = 1000$

$bx = -100$

$Snx = ax + (n - 1)\, bx$

$= 1000 + (n - 1) (-100)$

$ay = 500$

$by = 25$

$Sny = ay + (n - 1)\, b$

$= 500 + (n - 1)\, 25$

$= 475 + 25n$

$Snx = Sny$ _ _ _ _ _ _ _ $1.100 - 100n = 475 + 25n$

$1.100 - 475 = 25n + 100n$

$125n = 625$

$n = 5$

Jadi pada tahun ke -5 jumlah produksi akan sama.

b. $Snx = O$ _ _ _ _ _ $O = 1.100 - 100n$

$100n = 1.100$

$n = 11$

Jadi perusahaan X akan tutup pada tahun ke – 11.

c. $Sny = ay + (n - 1)\, by$

$S_{11} = 500 + (11 - 1)\, 25$

$= 500 + 250$

$= 750$ unit

Jadi pada saat perusahaan X sudah tidak operasi (tutup) pada tahun tersebut perusahaan Y memperoduksi sebanyak 750 unit.

3. Deret Ukur

a. Kegunaan

Deret ukur dapat digunakan untuk menghitung jumlah nilai dimasa yang akan datang dan memperkirakan nilai sekarang dari sejumlah uang yang akan diterima dimasa yang akan datang. Deret ukur ini sering digunakan (diterapkan) dalam kasus pinjam meminjam dan kasus invetasi, dalam mana kita hendak menghitung kridit yang harus dilunasi pada jangka waktu tertentu berdasarkan tingkat bunganya atau menghitung tingkat bunga dari suatu pinjaman berjangka waktu tertentu. Disamping itu penerapan deret ukur yang paling konvensional di bidang ekonomi adalah dalam hal perhitungan pertumbuhan penduduk. Sebagaimana pernah dinyatakan oleh Malthus, penduduk dunia tumbuh mengikuti pola deret ukur.

b. Rumus - Rumus

Dalam teori nilai uang :

$Fn = P (1 + 1)n$ $\qquad\qquad P = \dfrac{F}{(1 + 1)n}$

F = nilai dinamis depan

P = jumblah sekarang

i = suku bunga per tahun

n = jumlah tahun

Rumus diatas mengandung asumsi bahwa bunga dibayarkan satu kali dalam setahun. Jika bunga dibayarkan lebih dari sekali (misalnya m kali) dalam setahun, maka rumus tersebut menjadi sebagai berikut :

$$F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$ dimana m = frekwensi pembayaran Dalam setahun

$$P = \frac{F}{(1+i)^{nm}}$$

Penerapan dalam tingkat pertumbuhan penduduk :

$P_n = P\ r^{n-1}$

Dimana : p = populasi penduduk pada tahun basis (tahun ke-

Pn= populasi penduduk pada tahun ke-n

R= (1 + peresentasi pertumbuhan penduduk per tahun

n = jumlah tahun

Contoh Soal:

1. Jika suatu modal 1 pokok sebesar Rp 1.000 (p) , dibungakan secara majemuk dengan suku bunga 10% pertahun (i), maka
   a. Berapa jumlah modal tersebut pada 1 tahun yad ?
   b. Berapa jumlah modal tersebut pada 2 tahun yad ?

   Penyelesaiaan :

   a. $F_n = P (11 + i)^n$

      $F_1 = 1.000 (1 + 0,1)^1$

   b. $F_2 = 1.000 (1 + 0,1)^2$

      $= 1.210$

2. Seorang nasabah meminjam uang di bank X sebanyak Rp 5 juta untuk jangka waktu 3 tahun dengan tingkat bunga 2 % pertahun. Hitunglah
   a. Jumlah yang harus dibayar pada saat pelunasan?
   b. Jumlah uang yang harus dibayarkan seandainya bunga dibayarkan tiap semester?

   Penyelesaian :

   a. $F_n = 5.000.000 (1 + 0,02)3$

      $= 5.000.000 (1,061208)$

      $= 5.306.040$

      Jadi pada saat pelunasan setelah tiga tahun , harus membayar Rp 5.306.040.

   b. $F_n = p (1 + i/m)^{nm}$

      $$F_3 = 5.000.000 \left(1 + \frac{0.02}{2}\right)^{3.2}$$

      $= 5.000.000 (1,06152)$

      $= 5.307.600$

      Jadi jika frekwensi pembayaran tiap semester (2 kali setahun, maka m=2) pada saat pelunasan setelah tiga tahun, yang harus di bayar adalah sebesar Rp5.307.600

4. Tabungan seorang pemuda akan menjadi sebesar Rp 159.720 tiga tahun yang akan mendatang. Jika suatu bunga bank yang berlaku adalah 10% per tahun, berapa tabungan pemuda tersebut pada saat sekarang ?

   Penyelesaiaan :

   Diketahui F = 159.720

   = 3

$$P = \frac{159.720}{(1 + 0.1)^3} = \frac{159.720}{1,331}$$

$= 120.000$

Jadi tabungan pemuda tersebut saat sekarang Rp 120.000;

5. Uang sebanyak Rp 400.000 ditabung di BNI 1946 dengan tingkat bunga 8% per tahun. Hitunglah :
   a. Berapa jumlah tabungan tersebut pada 3 tahun yad ?
   b. Berapa jumlah tabungan tersebut pada 5 tahun yad ?

   Penyelesaiaan :

   a. Diketahui : $P = 400.000$
      $i = 0,08$
      $n = 3$

      $Fn = P (1 + i)^{n}$
      $F3 = 400.00 (1 + 0,08)^{3}$
      $= 400.000 (1,2597)$
      $= 400.000 (1,2597)$
      $= 503.880$

   b. $F5 = 400.000 (1 + 0,08)^{5}$
      $= 400.000 (1,4693)$
      $=$ Rp 587.720

6. Berapa uang yang harus ditabung bila ingin memperoleh Rp 483.153 pada lima tahun yang akan datang, sedangkan tingkat bunga yang berlaku 10% ?

   Penyelesaiaan :

   $$P = \frac{Fn}{(1+1)^{n}}$$

   $$P = \frac{483.153}{(1+0,1)^{5}}$$

   $=$ Rp 300.000

   Jadi jumlah uang yang harus ditabung adalah Rp 300.000

7. A menjamin uang Rp 1.000.000 pada B untuk jangka waktu 2 tahun dengan bunga 10% pertahun. Berapa jumblah uang yang harus dibayarkan oleh A saat jatuh tempo, jika pembayaraan bunganya dilakukan :
   a. Pada setiap akhir tahun
   b. Pada setiap akhir semester
   c. Mana yang lebih menguntungkan ? jelaskan !

   Penyelesaian :

   a. $Fn = P (1+1)N$
      $P = 1.000.000$
      $N = 2$
      $1 = 0,1$
      $F2 = 1.000.000 (1+0,1)2$
      $= 1.000.000 (1.21)$
      $= 1.210.000$

b. pembayaran per semester (m = 2)

$$Fn = p \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{nm}$$

$$F2 = 1.000.000 \left(1 + \frac{0,1}{2} \right) 2.2$$

$$= 1.000.000 \ (1,2155)$$

$$= 1.215.506$$

c. Bagi A lebih menguntungkan jika bunga dibayarkan tiap tahun sebab jumlah uang yang harus dibayarkan pada saat jatuh tempo lebih sedikit dibandingkan jika bunga dibayarkan tiap semester. Sebaliknya bagi B lebih menguntungkan jika bunga dibayarkan tiap semester, sebab jumlah uang yang akan diterima lebih besar.

7. Uang sebanyak 500.000 akan menjadi 901.000 apabila ditabung untuk jangka waktu 5 tahun, maka hitunglah :
   a. Berapa tingkat bunganya
   b. Berapa jumlah uang tersebut seandainya ditabung selama sepuluh tahun.

   Penyelesaian :

   a. Diketahui : p = 500.000
      F5=901.000
      N=5

$$Fn = P \ (1 + i)^{n}$$

$$F5 = 500.000 \ (1 + i)^{5}$$

$$\frac{901.000}{500.000} = 500.000 \ (1 + i)^{5}$$

$$1,802 = (1 + i)^{5}$$

$$\frac{\text{Log } 1,802}{5} = (1 + i)$$

$$\text{Anti log } 0,0512 = (1 + i)$$

$$1,125 = (1 + i)$$

$$I = 1,125 - 1$$

$$I = 0,125 \text{ ----- } i = 12,5\%$$

   b. Seandainya n = 10

$$Fn = p \ (1 \ i)^{n}$$

$$F10 = 500.000 \ (1 + 0.1125)^{10}$$

$$= 500.000 \ (3,2472)$$

$$= 1.623.600$$

Jadi tabungan akan menjadi Rp 1.623.600

8. Penduduk suatu negara tercatat 25.000.000 jiwa pada tahun 1980 dengan tingkat pertumbuhan 3% per tahun. Hitunglah :
   a. Berapa jumlah penduduknya pada tahun 1990?
   b. Berapa jumlah penduduknya pada tahun 2000?

   Penyelesaian :

   Diketahui p =25.000.000
   r = 1 + 0,03 = 1,03

n = pada tahun 1990 = 10

n = pada tahun 2000 = 20

a. Penduduk tahun 1990

Pn = p.r n-1

P10 = 25.000.000 (1,03) 10-1

P10 = 25.000.000 (1, 03) 9

Log p10 = log 25.000.000 (1,03)9

Log p10 = log 25.000.000 + 9 log (1,03)

Log p10 = 7,3979 + (0, 0128)

Log p10 = 7, 5131 --------- anti log p10 = 32.600.000

Jadi jumlah penduduk negara tersebut pada tahun 1990 adalah sekitar 32.600.000 jiwa.

b. Penduduk pada tahun 2000

P20 = 25.000.000 (1,03)20-1

Log p20 = log 25.000.000 (1,03) 19

Log p20 = log 25.000.000 + 19 log (1,03)

Log p20 = 7,3979 + 19 (0, 0128)

Log p20 = 7,6411 -----------anti log p20= 43.800.000

Jadi penduduk pada tahun 2000 sekitar = 43.800.000 jiwa.

9. Penduduk sebuah kota metropolitan tercatat 2.500.000 jiwa pada tahun 1982 dan diperkirakan menjadi 3.000.000 jiwa pada tahun 1986. Jika tahun 1980 merupakan tahun basis hitunglah :

a. Berapa persen tingklat pertumbuhannya ?

b. Berapa jumlah penduduknya pada tahun 1980 ?

c. Berapa jumlah penduduknya pada tahun 1991 ?

d. Pada tahun berapa jumlah penduduknya 5.000.000 jiwa ?

penyelesaian :

Dalam soal ini , 1980 = tahun ke -1   1986 = tahun ke -7

1982 = tahun ke -3   1991 = tahun ke -12

a. Pn = p . rn -1

P7 = p . r7 -1 ---- 3.000.000 = p . r6

P3 = p . r3-1 ---- 2.500.000 = p . r2

1,2 = r4

r = log 1,2/4 ---- anti log

r = 1,0466

tingkat pertumbuhan penduduknya adalah 4,66%

b. P3 = p . r2 ----- p = p3/r2

P = 2.500.000/1,04662

P = 2.282.271 jiwa

Jadi penduduk pada tahun basis 1980 adalah 2.282.271 jiwa

c. Penduduk pada tahun 1991

P12 = p . r11

P12 = 2.282.271 (1,0466)11

Log p12 = log 2.282.271 (1,0466) 11

Log p12 = log 2.282.271 +11 log (1,0466)

Log p12 = 6,3584 + 11 (0,01978)

Log p12 = 5,5760 -----anti log

P12 = 3.766,934

Jadi penduduk pada tahun 1991 adalah 3.766.934 jiwa.

d. Pn = p . rn-1

5.000.000 = 2.282.271 (1,0466) n-1

5.000.000 / 2.282.271 (1,0466) n-1

2,191 = (1.0466) n-1

Log 2,191 = log (1,0466) n-1

Log 2,191 = n-1 log (1,0466)n-1

03,3406 = n-1 (0,195)

0,3406 = 0,0195n -0,0195

0,3406 + 0,0195n -0,0195n

0,3601 =0,0195n

N =0,3401/0,0195

N = 18,5

Jadi penduduk sebesar 5.000.000 jiwa akan terjadi pada tahun ke 18 atau pada tahun 1997.

11. Jumlah penduduk suatu daerah tahun 1976 = 200.000.000 jiwa dengan tingkat pertumbuhan 4% per tahun . hitunglah jumlah penduduk daerah itu pada tahun 1988 !

Penyelesaian :

Diketahui : p = 200.000.000

r = 0,04

n = 1988-1976 + 1 = 13

$pn = p (1 + r)^{n-1}$

$p13 = 200.000.000 (1 + 0,04)^{12}$

log p13 = log 200.000.000 + 12 log (1,04)

log p13 = 8,3010 + 12 (0,017)

=8,505 ----- antilog

P13 = 319 .899.511

Jadi penduduk daerah itu pada tahun 1986 adalah sebesar 319.899.511 jiwa .

12. Jumlah penduduk pada suatu daerah pada tahun 1970 sebesar 100.000.000 jiwa dan tahun 1985 menjadi 150.000.000 jiwa. Berapa tingkat pertumbuhan penduduknya per tahun ?

Penyelesaian :

Diketahui : n = 1985 – 1970 = 15 +1 = 16

P = 100.000.000

P16 = 150.000.000

$Pn = p (1 + r)^{n-1}$

$P16 = p (1 + r)^{15}$

$150.000.000 = 100.000 000 (1 +r)^{15}$

$150.000.000 / 100.000 000 = (1 +r)^{15}$

1,5 = (1 + r)15

Log 1,5 /15 = (1 + r)

1,0274 = (1 + r)

$R = 1{,}0274 - 1$

$= 0{,}1274$ atau $2{,}74\%$

Jadi pertumbuhannya adalah 2,74%.

13. Penduduk kota E pada tahun 1975 = 153.000 jiwa dan pada tahun 1985 berhumlah 186.506. bila tahun 1974 ditetapkan sebagai tahun basis , maka hitunglah ?

a. Berapa persen tingkat pertumbuhannya ?

b. Berapa jumlah penduduk pada tahun 1974 ?

c. Pada tahun berapa jumlah penduduk mencapai 172.305 ?

Penyelesaian :

a. Tingkat pertumbuhan

Diketahui : Tahun 1975 = n ke 1

Tahun 1989 = ke 12

$P2 = 153.000$

$P12 = 186.506$

$Pn = p\ (1 + r)\ n\text{-}1$

$P2 = p\ (1 + r)\ 1$ ------ $153.000 = p\ (1 + r)1$

$P12 = p\ (1 + r)\ 11$ ------ $\underline{186.560 = p\ (1 + r)\ 11\ (:)}$

$1{,}2190 \quad = (1 + r)\ 10$

$\text{Log } 1{,}2190 / 10 \quad = (1 + r)$

$1{,}02 \quad = (1 + r)$

$r \quad = (1{,}02 - 1$

$r \quad = 0{,}02$ atau 2%

Jadi tingkat pertumbuhan penduduknya adalah 2%

b. Jumlah penduduk tahun basis (1974)

$Pn = p\ (1 + r)^{n-1}$

$P2 = p\ (1 + r)^{1}$

$153.000 = p\ (1 + 0{,}02)^{1}$

$P = 153.000 / 1{,}02)^{1}$

$P = 150.000$ jiwa (penduduk tahun 1974)

c. $Pn = p\ (1 + r)^{n-1}$

$172.305 = 150.000\ (1 + 0{,}02)^{n-1}$

$172.305 / 150.000\ (1 + 0{,}02)^{n-1}$

$1{,}1487 = (1{,}02)^{n-1}$

$\text{Log } 1{,}1487 \quad = n - 1 \log\ (1{,}02)$

$0{,}0602 = n - 1 \log\ (1{,}02)$

$0{,}0086\ n \quad = 0{,}0688$

$N \quad = 0{,}0688 / 0{,}0068$

$N \quad = 10$

Jadi penduduk kota tersebut akan menjadi 172. 305 pada tahun ke 10 yaitu pada tahun 1984.

Soal Latihan :

1. Perusahaan beta EX menghasikan 6.000 buah bata pada bulan pertama operasinya . perusahaan menambah produknya sebanyak 1000 buah tiap bulan . jika perkembangan produksinya kontasn hitunglah :
   a. Bata yang diahasilakan pada bulan ke – 7
   b. Bata yang diahasilakan pada bulan ke – 9
   c. Jumlah bata yang dihasilkan sampai bulan ke -5
   d. Jumlah bata yang dihasilkan sampai bulan ke -10
2. Besarnya penerimaan perusahaan CE adalah Rp 360.000.000 pada tahun ke lima dan 490.000.000 pad tahun ketujuh . jika perkembangan penerimaan berpola derat hitung , maka hitung lah
   a. Nilai perkembangan penerimaan pertahun
   b. Besaarnya penerimaan pada tahun pertama
   c. Pada tahun berapa penerimaan menjadi 230.000.000
3. Perusahaan sandal PE memproduksi 20.000 pasang sandal pada tahun pertama operasinya namun karena situasi perekonomian yang tidak menguntungkan , produksinya terus menyusut 1000 pasang sandal setiap tahun . jika, penurunan produksinya konstan , maka hitunglah ?
   a. Berapa produksinya pada tahun ke lima
   b. Berapa produksinya pada tahun ke sepuluh
   c. Berpa produksinya pada tahun kelima belas
   d. Berapa yang telah dihasilkan sampai dengan tahun ke -10
   e. Berapa yang telah dihasilkan sampai dengan tahun ke -15
   f. Pada tahun berapa produksinya sama dengan 0 atau tutup.
4. Perusahaan minuman SEGAR memproduksi 12.00 botol pada tahun ke 6 operasinya . karena persaingan keras dari minuman –minuman merek lain , produksinya terus menyusut secara konstan sehingga pada tahun ke 10 hanya memproduksi 9.000 botol . diminta hitunglah :
   a. Berapa botol penurunan produksi pertahaun
   b. Pada tahun berapa perusaan tidak memproduksi botol (tutup)
   c. Berapa jumlah botol yang ia hasilkan selama operasinya ?
5. Perusahaan A memulai produksinya dengan 4.000 unit dan berkurang 400 unit setiap tahunnya .sedangkan perusahaan B mewakili produksinya dengan 2000 unit dan meningkat 100 unit setiap tahunnya . diminta hitunglah:
   a. Pada tahun berapa produksi mereka sama jumlahnya ?
   b. Pada tahun berapa perusaan A tidak beroperasi (tutup)
   c. Berapa produksi perusaan B pada tahun perusahaan A tidak beroperasi(tutup) ?
   d. Berapa jumlah produksi yang dihasilkan oleh perusahaan A selama operasinya ?
6. Jika suatu modal pokok suatu usaha simpan pinjam sebesar Rp 10.000.000; , dibungakan secara majemuk dengan suku bunga 12% per tahun, maka hitunglah :
   a. Berapa jumlah modal tersebut pada 5 tahun yad ?
   b. Berapa jumlah modal tersebut pada 10 tahun yad ?
7. Tuan BE meminjam uang di bank KA sebanyak untuk jangka waktu 3 tahun dengan tingkat bunga 20% per tahun , maka hitunglah :
   a. Jumlah yang harus dibayar pada saat pelunasan ?

b. Jumlah uang yang harus dibayar seandainya bunga dibayarkan tiap semester ?

8. Tabungan gadis cantik akan menjadi Rp 3.993.000 tiga tahun yang akan datang . jika suatu bunga bank yang berlaku adalah 10% per tahun , berapa tabungan gadis cantik tersebut pada saat sekarang ?
9. Uang sebanyak Rp 1.200.000 ditabung di bank BE dengan tingkat bunga 8% per tahun . hitunglah :
   a. Berapa jumlah tabungan tersebut pada 4 tahun yad ?
   b. Berapa jumlah tabungan tersebut pada 7 tahun yad ?
10. BE meminjam uang sebesar Rp 10.000.000 pada A untuk jangka waktu 2 tahun dengan bunga 10% per tahun . berapa jumlah uang yang harus dibayarkan oleh BE pada saat jatuh tempo , jika pembayaran bunga dilakukan :
    a. Pada setiap akhir tahun
    b. Pada setiap akhir semester ?
    c. Pada setiap akhir triwulan ?
    d. Mana yang lebih menguntungkan ? jelaskan !
11. Uang sebanyak Rp 1.000.000 akan menjadi Rp 1.802.00 apabila ditabung untuk jangka waktu 5 tahun , maka hitunglah :
    a. Berapa tingkat bunganya ?
    b. Berapa jumlah tersebut seandainya ditabung selama 10 tahun ?
    c. Jika jangka waktu yang dimaksud diatas bukan 5 tahun melainkan 10 tahun, berapa tingkat bunganya ?
12. Penduduk negara NGAMARTA tercatat 5.00.000 jiwa pada tahun 1980 dengan tingkat pertumbuhan 3% per tahun , maka hitunglah ?
    a. Berapa jumlah penduduknya pada tahun 1990 ?
    b. Berapa jumlah penduduknya pada tahun 2000 ?
13. Penduduk negara NGASTINA tercatat 5.000.000 jiwa pada tahun 1982 dan diperkirakan menjadi 6.000.000 jika pada tahun 1986 , jika tahun 1980 sebagi tahun basis , maka hitunglah :
    a. Berapa persen tingkat pertumbuhannya ?
    b. Berapa jumlah penduduknya pada tahun 1980 ?
    c. Berapa jumlah penduduknya pada tahun 1991 ?
    d. Pada tahun berapa jumlah penduduknya 10.000.00 jiwa ?
14. Jumlah penduduk keajaan MAJAPAHIT tahun 1976 tercatat 50.000.000 jiwa dengan tingkat pertumbuhan 4% per tahun. Hitunglah jumlah penduduk kerajaan majapahit pada tahun 1988?
15. Jumlah penduduk suatu kota di NGAMARTA pada tahun 1970 sebesar 10.000.000 jiwa dan tahun 1985 menjadi 15.000 000 jiwa . berapa tingkat pertumbuhan penduduk kota itu per tahun ?
16. Penuduk kota EB pada tahun 1975 tercatat 153.000.000 jiwa dan pada tahun 1985 menjadi 186.506.000. bila tahun 1972 sebagai tahun basis, maka hitunglah ?
    a. Berapa persen tingkat pertumbuhannya ?
    b. Berapa jumlah penduduk pada tahun 1980 ?
    c. Berapa jumlah penduduk pada tahun 1999 ?
    d. Pada tahun berapa jumlah penduduknya menjadi 172.305.000 ?

17. Diketahui jumlah tahun 1986 tercatat jiwa , tingkat pertumbuhan 3% per tahun . jumlah rumah yang sudah terbangun 20.500 buah dengan pertumbuhan 150 buah pertahun . bila satu rumah rata-rata dihuni 5 jiwa. Berapa jumlah kekurangan rumah yang harus dibangun lagi tahun 2000 ?

BAB II

FUNGSI LINIER

1 .Fungsi permintaan dan fungsi penawaran

Fungsi permintaan menghubungkan antara variabel harga dengan variabel jumlah yang diminta .

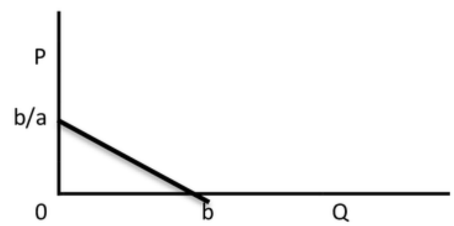
Bentuk umum fungsi permintaan :

$Q = a\,p + b$ -----→ Q fungsi P

$P = -\,1/a\,Q + b/a$ ------→ P fungsi Q

P = harga a= koefisien variabel P

Q= jumlah b= konstanta



Kurve permintaan

Contoh :

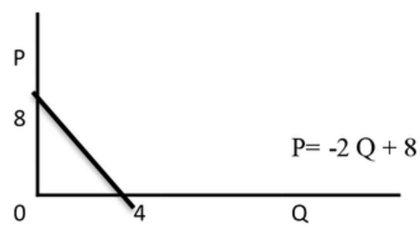
1. Diketahui fungsi prmintaan $p = -2\ Q + 8$

   Gambar grafiknya!

   Penyelesaian :

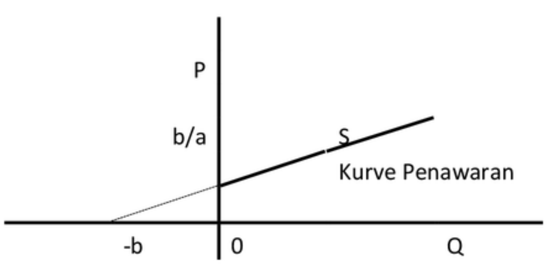
   Jika $Q = 0$ -------→ $P = 8$

   $P = 0$ -------→ $Q = 4$



Fungsi penawaran menghubungkan antara variabel harga dengan variabel jumlah yang ditawarkan .

Bentuk umum --→ $Q = a\,P - b$ atau $P = 1/a\,Q + b/a$



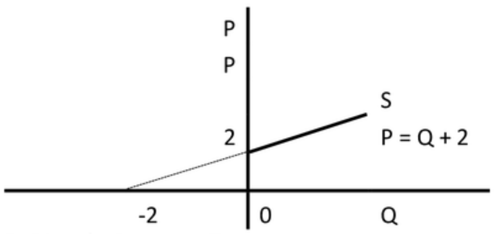
Contoh :

Diketahui fungsi penawaran : P = Q + 2, gambar grafiknya !

Penyelesaian :

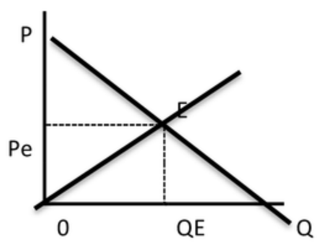
Jika Q = 0 ------ > P = 2

P = 0 ------ > Q = -2



2. Keseimbangan Pasar

Pasar suatu barang dikatakan berada dalam keseimbangan apabila jumlah yang diminta dipasar tersebut sama dengan jumlah barang yang ditawarkan . syarat keseimbangan pasar terjadi : Qd = Qs



Qd = jumlah permintaan

Qs = jumlah penawaran

Pe = harga keseimbangan

Qe = jumlah keseimbangan

E = titik keseimbangan

Contoh 1 :

Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran P = - 2 Q + B dan fungsi P = Q = 2 diminta :

1) carilah harga dan kuantitas keseimbangan

2) gambar grafiknya

Penyelesaian :

1) Syarat keseimbangan Qd = Qs

   -2 Q + 8 = Q + 2

   -2 Q – Q = 2 – 8

   -3Q = - 6 ------ > Q = 2

   P = ?

   P = -2 (2) + 8 ------ > P = 4

   jadi keseimbangan pasar terjadi pada harga rp 4 dan kuantitas sebanyak 2 unit.

2) Grafik

   Permintaan : P = -2 Q + 8

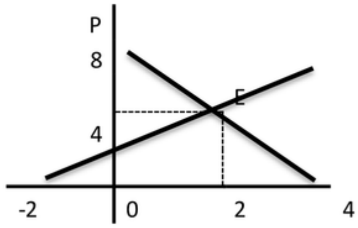
   Q = 0 ---------- > P = 8

   P = 0 ---------- > Q = 4

   Penawaran : P = Q + 2

   Q = 0 ---------- > P = 2

   P = 0 ---------- > Q = -2



Contoh 2 :

Diketahui fungsi permintaan suatu barang P = - Q + 50 dan fungsi penawaran P = Q + 10

Diminta : 1) Carilah harga dan kuantitas keseimbangan

2) Gambar grafiknya

Penyelesaian :

1) Syarat keseimbangan D = S

- Q + 50 = Q + 10	P = ?
- Q – Q = 10 – 50	P = - Q + 50
- 2Q = - 40	P = - 20 + 50
Q = 20	P = 30

Jadi harga keseimbangan Rp 30 dan kuantitas keseimbangan adalah 20 unit .

2) Grafik

Permintaan : P = - Q + 50

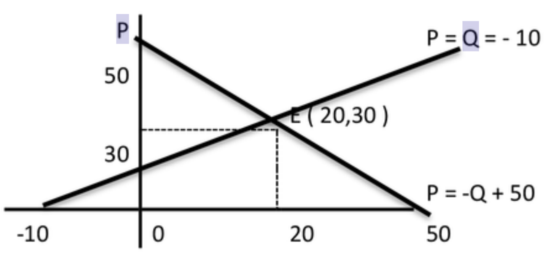
Q = 0 ---------- > P = 50

P = 0 ---------- > Q = 50

Penawaran : P = Q + 10

Q = 0 ---------- > P = 10

P = 0 ---------- > Q = - 10



Contoh 3 :

10 buah buku dijual ketika harga Rp 80 dan 20 buah terjual ketika harga Rp 60 dan bila harga Rp 50 akan terjual 30 buah dan apabila harga di turunkan lagi Rp 35 buku tersebut tidak dijual.

Diminta :

1) Buat persamaan permintaan dan penawaran
2) Tentukan harga dan kuantitas keseimbangan
3) Gambar grafiknya

Penyelesaian :

1) – persamaan permintaan : $P - P1 = \frac{P2 - P1}{Q2 - Q1}(Q - Q1)$

$$P - 80 = \frac{60 - 80}{20 - 10}(Q - 10)$$

$$P - 80 = -20/10\,(Q - 10)$$

$$P - 80 = -2Q + 20$$

$$P = -2Q + 20 + 80$$

$$P = -2Q + 100$$

– Persamaan penawaran : $P - P1 = \frac{P2 - P1}{Q2 - Q1}(Q - Q1)$

$$P - 50 = \frac{35 - 50}{0 - 30}(Q - 30)$$

$$P - 50 = -15 / -30\,(Q - 30)$$

$$P - 50 = 1/2Q - 15$$

$$P = 1/2Q - 15 + 50$$

$$P = 1/2Q + 35$$

2) Syarat keseimbangan D = S

- $2Q + 100 = 1/2\,Q + 35$	$P = ?$
- $2Q - 1/2 = 35 - 100$	$P = -2Q + 100$
- $2{,}5\,Q = -65$	$P = -2\,(26) + 100$
$Q = -65 / -2{,}5$	$P = 48$
$Q = 26$	

Jadi keseimbangan terjadi pada harga Rp 48 dan kuantitas 26 unit.

3) Grafik

-permintaan : $P = -2Q + 100$

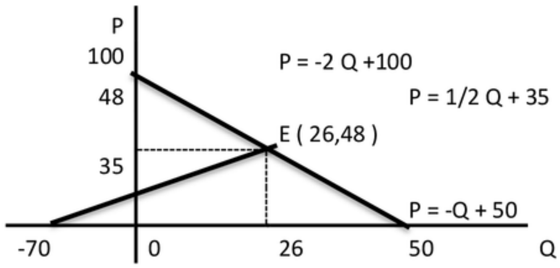
$Q = 0$ ------ > $P = 100$

$P = 0$ ------ > $Q = 50$

-penawaran : $P + 1/2\,Q = 35$

$P = 0$ -------- > $Q = -70$

$Q = 0$ -------- > $P = 35$



3. Pengaruh pajak dan subsidi

Pengenaan pajak atau pemberian subsidi atas suatu barang akan mempengaruhi keseimbangan barang tersebut , memengaruhi harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan.

Contoh 1 :

Diketahui fungsi permintaan P = - Q + 15 dan fungsi penawaran P = 0,5 Q + 3 . terhadap barang tersebut dikenakan pajak Rp 3,-. Hitunglah :

1) Keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak!
2) Gambar grafiknya !

Penyelesaian :

1) -keseimbangan sebelum pajak

D = S

- Q + 15 + 0,5 Q + 3   P = ?
- Q – 1/2Q = 3 - 15   P = - Q + 15
- 1,5Q = - 12   P = - 8 + 15

Q = - 12 / (-1,5)   P = 7

Q = B

-Keseimbangan sesudah pajak D = S'

S' --------> P = 0,5 Q + 3 + 3

P = 0,5 Q + 6

D = S'

- Q = 15 = 0,5 Q + 6   P = ?
- 1,5Q = - 9   P = 0,5 Q + 6

Q = - 9 / (-1,5)   P = 0,5 (6) + 6

Q = 6   P = 9

Jadi keseimbangan setelah pajak terjadi pada harga Rp 9 dan kuantitas 6 unit.

2) Grafik

-permintaan : P = - Q + 15 --> Q = 0 ---> P = 15

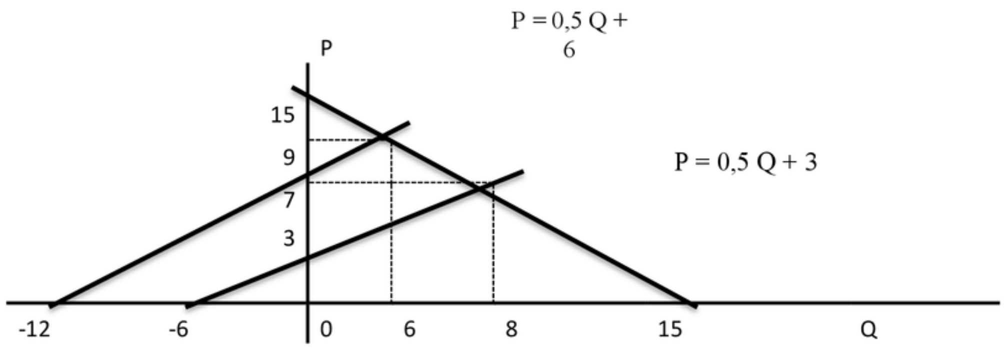
P = 0 ---> Q = 15

-penawaran : P = 0,5 Q + 3 --> Q = 0 ---> P = 3

P = 0 ---> Q = - 6

S' : P = 0,5 Q + 6 ---> Q = 0 ---> P = 6

P = 0 ---> Q = - 12



Contoh 2 :

Diketahui fungsi permintaan P = - Q + 15 dan fungsi penawaran P = 0,2Q + 3. Subsidi Rp 1,5 untuk setiap unit barang . diminta :

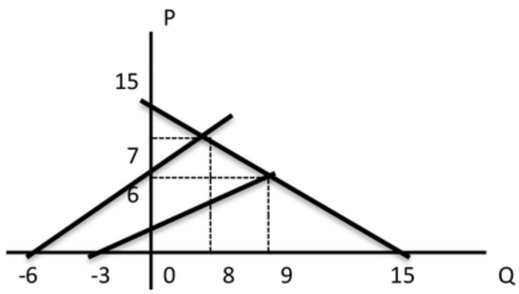
1) Keseimbangan pasar setelah subsidi
2) Gambar grafiknya!

Penyelesaian :

1) –keseimbangan sebelum subsidi = keseimbangan sebelum pajak yang di hitung pada contoh 1 yaitu (8,7)
   Contoh 1 yaitu (8,7)
   -keseimbangan setelah subsidi D = S'
   S' : P = 0,5 Q + 3 – 1,5
   P = 0,5 Q + 1,5
   D = S'
   -Q + 15 = 0,5 Q + 1,5   P = ?
   -Q – 0,5Q = 1,5 – 15   P = -Q + 15
   -1,5Q = - 13, 5   P = -9 + 15
   Q = 9   P = 6

Jadi keseimbangan pasar sesudah subsidi terjadi pada harga Rp 6 dan kuantitas 9 unit.

2) Grafik
   D : P = - Q + 15 -----> Q = 0 -----> P = 15
   P = 0 -----> Q = 15
   S : P = 0,5 Q + 3 ------> Q = 0 ----> P = 3
   P = 0 ------> Q = - 6
   S' : P = 0,5 Q + 1,5 -----> Q = 0 -----> P = 1 , 5
   P = 0 -----> Q = - 3



Contoh 3 :

Fungsi permintaan dan penawaran suatu barang adalah :
2 P + 2 Q – 30 = 0 dan 3 P – 3 Q – 18 = 0. Terhadap barang tersebut dikenkan pajak sebesar 25% dari harga dan sekaligus menerima subsidi Rp 1,5 / unit. Diminta :

1) Keseimbangan pasar setelah pajak dan subsidi
2) Hitunglah pajak per unit
3) Hitung besar penerimaan dan pengeluaran pemerintah
4) Gambar grafiknya

Penyelesaiaan :

1) D : --------> 2 P + 2 Q – 30 = 0
   2 P = - 2 Q + 30
   P = - - Q + 15

   S : --------> 3 P – 3 Q – 18 = 0
   3 P = 3 Q + 18
   P = Q + 6

   S' : --------> P = (a + b Q) (1 + r) – S per unit
   P = (Q + 6) (1 + 25 %) – 1,5
   P = (Q + 6) (1 + 0,25) – 1,5
   P = (Q + 6) 5/ 4 – 1,5
   P = 5 /4 Q + 7,5 – 1,5
   P = 5 / 4 Q + 6

   Keseimbangan pasar sesudah pajak dan subsidi D = S
   D = S
   - Q + 15 = 5 /4 Q + 6 P = ?
   - Q – 5 / 4 Q = 6 – 15 P = - Q + 15
   - 2 1/ 4 Q = - 9 P = - 4 + 15
   Q = - 9 / (- 2 1 / 4) P' = 11
   Q = 4

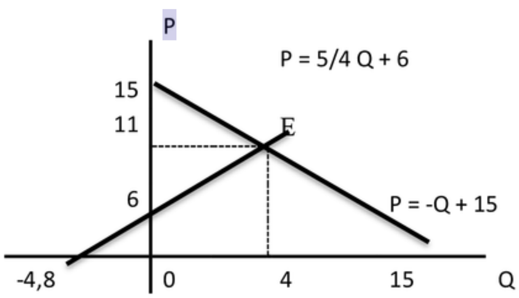
2) Pajak per unit
   Pajak per unit = $\frac{r}{1 + r}$ x P'

$= \dfrac{25\ \%}{1 + 25\%} \times 11$

$= \dfrac{0{,}25}{1{,}25} \times 11$

$= 2{,}2$

3) Besarnya pajak yang di terima pemerintah :
   Q' x t / unit --------> 4 x 2 ,2 = 8,8
   Besarnya subsidi yang di keluarkan pemerintah
   Q' x s – unit ---------> 4 x 1 , 5 = 4
4) Grafik
   D : P = - Q + 15
   Q = 0 --------> P = 15
   P = 0 ---------> Q = 15
   S' : P = 5 / 4 Q + 6
   Q = 0 --------> P = 6
   P = 0 --------> Q = - 4, 8



Contoh 4 :

Harga dan kuantitas keseimbangan suatu barang terjadi pada P = 30 dan Q = 10 unit. Apabila harga naik menjadi 35 tak ada seorangpun yang mau membeli padahal barang tersebut Rp 3 / unit . di tanyakan :

1) Persamaan permintaan dan penawaran
2) Keseimbangan pasar
3) Besarnya subsidi
4) Gambar grafiknya

   Penyelesaiaan :

   1) Fungsi permintaan dan penawaran

Harga	permintaan	penawaran
P1 = 30	Qd	Qs
P 2 = 35	Q1 = 10	Q1 = 10
	Q2 = 0	Q2 = 15

Fungsi permintaan

$$\frac{P - P1}{P2 - P1} = \frac{Q - Q1}{Q2 - Q1}$$

$$\frac{P - 30}{35 - 30} = \frac{Q\ \ 10}{0 - 10}$$

fungsi penawaran

$$\frac{P - P1}{P - P1} = \frac{Q - Q1}{Q2\ \ Q1}$$

$$\frac{P - 30}{35 - 30} = \frac{1 - 10}{15 - 10}$$

$$\frac{P - 30}{5} = \frac{Q - 10}{-10} \qquad\qquad \frac{P - 30}{5} = \frac{Q - 10}{5}$$

- 10 p + 300 = 5 Q – 50   5 P – 150 = 5 Q – 50
- 10 P + 300 + 50 = 5Q   5P – 150 + 50 = 5 Q
- 10P + 350 = 5Q   5P – 100 = 5Q

Q = - 2 P + 70   Q = P - 20

2) Keseimbangan pasar dengan subsidi Rp. 3,- / unit :

S --> Q = P – 20 ---> P = Q + 20

P = + 20 – 3

P = Q + 17 ----> Q = P – 17

Keseimbangan terjadi D = S

- 2 P + 70 = P   Q = ?
- 2 P – P = - 17 – 70   Q = P – 17

- 3 P = - 87   Q = 29 – 17

P = 29   Q = 12

3) Besarnya subsidi

Q' X S / unit ----------> 12 X Rp 3 = 36

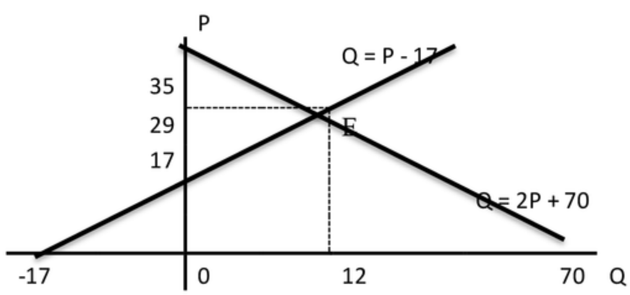
4) Grafik

D : Q = - 2 P + 70 ----> P = 0 ----> Q = 70

Q = 0 ----> P = 35

S' : Q = P – 17 ----------> P = 0 ----> Q = - 17

Q = 0 ----> P = 17



4. Keseimbangan pasar kasus 2 komoditi

Qdx = f (px, py) dan Qdy = f (px , py)

Qdx = jumlah permintaan akan x

Qdy = jumlah permintaan akan y

Px = harga x Py = harga y

Contoh 1 :

Fungsi permintaan barang x adalah Qdx = 10 – 4 px + 2 py dan fungsi penawarannya Qdx = - 6 + 6 px. Fungsi permintaan barang y adalah Qdy = 9 + 4 px – 3 py dan fungsi penawarannya Qsy = - 3 + 7 py . hitunglah harga dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar untuk masing-masing barang tersebut .

Penyelesaian :

- Keseimbangan barang x ----------> Qdx = Qds
  10 – 3 px + 2 py = - 6 + 6 px
  -4 px – 6 px + 2 py = - 6 – 10
  -10 px + 2 py = - 16
  10 px – 2 py = 16 . . . . (1)
- Keseimbangan barang y ----------> Qdy = Qsy
  9 + 4 px – 3 py = - 3 + 7 py
  4 px – 3 py – 7 py = - 3 – 9
  4 px – 10 py = - 12
  -4 px + 10 py = 12 . . . . (2)

Dari persamaan (1) dan (2)
10 px – 2 py = 16 x 5 --> 50 px – 10 py = 80
-4 px + 10 py = 12 x 1 --> - 4 px + 10 py = 12 +
46 px = 92
Px = 92 / 46
Px = 2

Px = 2 maka py = ?

- 4 px + 10 py = 12
- 4 (2) + 10 py = 12
- -8 + 10 py = 12
  10 py = 12 + 8
  Py = 20 / 10
  Py = 2

Qdx = 10 – 4 px + 2 py
= 10 – 4 9 2) + 2 (2)
= 10 – 8 + 4
= 6

Qdy = 9 + 4 px – 3 py
= 9 + 4 (2) – 3 (2)
= 9 + 8 – 6
= 11

Keseimbangan x : (6,2) keseimbangan y : (11, 2)

Contoh 2 :

Fungsi permintaan barang A adalah QA = 10 – PA – 2 PB dan fungsi penawarannya QA = - 3 + PA + PB. Sedangkan fungsi permintaan barang B adalah QB = 6 – PA – PB dan fungsi penawarannya QB = - 2 + PB. Terhadap masing –masing barang dikenakan pajak Rp 1 & Rp 0,5 per unit. Hitung keseimbangan pasar dan besarnya pjak yang di terima pemerintah .

Penyelesaiannya :

-keseimbangan barang A ---- > DA = S'A

S'A : QA = - 3 + (PA – 1) + (PB – 0,5)
= - 3 – 1 – 0,5 + PA + PB
= - 4 ,5 + PA + PB

DA = S'A
10 – PA – 2 PB = - 4,5 + PA + PB
PA – PA – 2 PB – PB = - 4,5 – 10
2 PA – 3 PB = - 14,5 . . . . (1)

-keseimbangan barang B ---- > DB = S'B

S'B : QB = - 2 + (PB – 0,5)
QB = - 2 + PB – 0,5
QB = - 2,5 + PB

DB = S'B
6- PA – PB = - 2,5 +PB
-PA – PB – PB = - 2,5 – 6
PA – 2 PB = - 8,5 . . . . (2) .
-dari persamaan (1) dan (2)

-2 PA – 3 PB = - 14,5 X 1 – 2 PA – 3 PB = - 14,5

PA – 1 PB = - 8,5 X2 – 2 PA – 4 PB = 17 -

PB = 2, 5

PB = 2,5 maka PA dapat dicari
- PA - 2 PB = - 8,5
- PA - 2 (2,5) = - 8,5
- PA = - 8,5 + 5
- PA = - 3,5
PA = 3,5

QA = 10 – PA – 2 PB
= 10 – 3,5 - 2 (2,5)
= 10 – 3,5 – 5
= 10 – 8,3
= 2 (dibulatkan)

QB = 6 – PA - PB
= 6 – 3,5 – 2,5
= 6 - 6
= 0

Jadi keseimbangan barang A ---> (2 , 3,5)

B ---> (0 , 2,5)

Besarnya pajak yang diterima pemerintah :

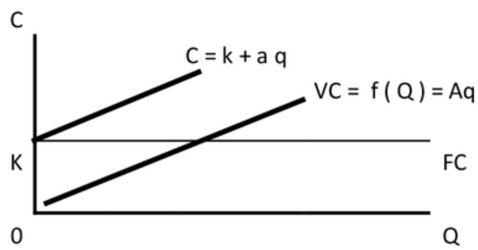
= (Q'A x tA/unit) + (Q'B x tB/unit)
= (2 x 1) + (0 x 0,5)
= Rp 2

5. Fungsi biaya dan fungsi penerimaan,

Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan dalam operasi bisnis terdiri dari biaya tetap dan biaya variable.

FX = k
VC = f (Q) = a Q
C = f (Q) = FC + VC = k + a Q
FC = biaya tetap
VC = biaya variable
k = konstanta
a = lereng (slope)
Q = kuantitas

Gambar :



Contoh 1 :

Biaya tetap yang dikeluarkan oleh perusahaan sebesar Rp 20.000 sedang biaya variabelnya ditunjukkan persamaan VC = 100 Q Diminta :

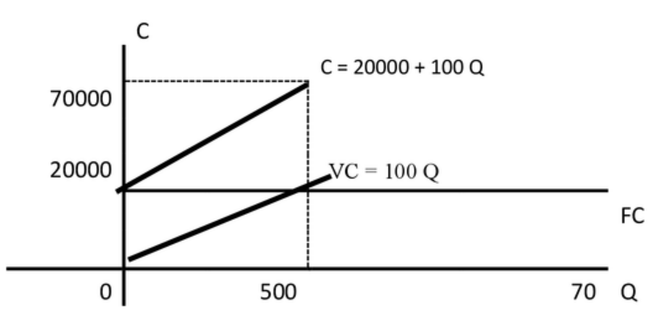
1) Tunjukkan persamaan dan kurva biaya total.
2) Hitung biaya total yang dikeluarkan oleh perusahaan tersebut jika memproduksi 500 unit.

Penyelesaian :

1) FC = 20.000
VC = 100 Q
C = FC + VC
C = 20.000 + 100 Q

2) Jika Q = 500 unit
C = 20.000 + 100 ----> C = 20.000 + 100 (500)
= 20.000 + 50.000
= 70.000

Gambar :



Penerimaan total adalah hasil kali jumlah barang yang terjual dengan harga jual per unit barang tersebut.

$$R = f(Q) = Q \times P$$

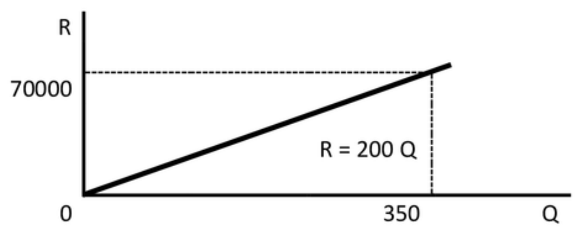
Contoh :

Harga jual suatu produk Rp 200 / unit. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total apabila produk terjual sebanyak 350 unit.

Penyelesaian :
P = Rp 200
Maka persamaan penerimaan : $R = Q \times P$
$= Q \times 200$
$= 200\,Q$

Apabila produk terjual 350 unit :
$R = 200\,Q$
$= 200\,(350)$ ----> $R = 70.000$

Gambar



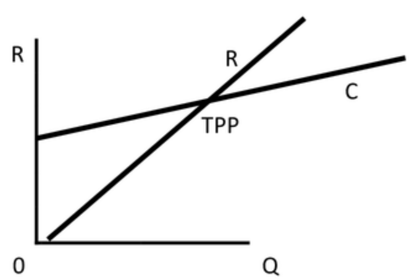
6. Keuntungan, kerugian dan pulang pokok

Keuntungan, kerugian dan pulang pokok dapat diketahui dengan membandingkan total penerimaan (R) dengan total biaya.
(C).

$R > C$ ----------> kondisi keuntungan
$R < C$ ----------> kondisi kerugian
$R = C$ ----------> pulang pokok

Pulang pokok (break even) yaitu suatu konsep yang digunakan untuk menganalisa jumlah minimum out put yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian.
Gambar :

C = biaya
R = penerimaan
Q = jumlah
TPP = titik pulang pokok
C = total biaya
R = penerimaan total



Contoh :

Biaya total yang dikeluarkan oleh perusahaan ditunjukkan oleh persamaan C = 20.000 + 100 Q dan penerimaan totalnya R = 200 Q. Ditanyakan :

1) Hitung break even (pulang pokok) !
2) Apa yang terjadi jika memproduksi 300 unit ?
3) Gambar grafiknya !

Penyelesaian :

1) Break even

R = 200 Q

C = 20.000 + 100 Q

Break even R = C

$$\begin{aligned} 200\,Q &= 20.000 + 100\,Q \\ 200\,Q - 100\,Q &= 20.000 \\ 100\,Q &= 20.000 / 100 \\ Q &= 200 \end{aligned}$$

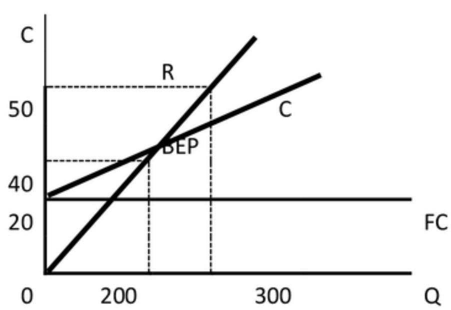
2) Jika Q = 300 unit

R = 200 Q -------------> R = 200 (300)
= 60.000

C = 20.000 + 100 Q -------------> C = 20.000 + 100 (300)
= 20.000 + 30.000
= 50.000

Keuntungan = R – C
= 60.000 – 50.000
= 10.000

3) Gambar Grafik



7. Fungsi Anggaran

Fungsi anggaran mencerminkan batas maksimum kemampuan seseorang konsumen dalam membeli dua macam output (atau lebih) berkenan dengan jumlah pendapatannya dan harga masing – masing output.

Bentuk umum fungsi anggaran :

$$M = a.\,Pa + b.\,Pb$$

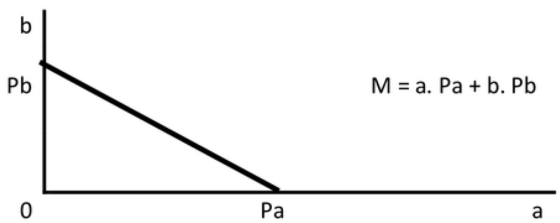
Pada teori konsumen :

M = jumlah pendapatan konsumen
a = jumlah outpu a
b = jumlah output b
Pa = harga a per unit
Pb = harga b per unit

Pada teori produsen :

M = jumlah dana produsen
a = jumlah output a
b = jumlah output b
Pa = harga a per unit
Pb = harga b per unit

Gambar



Contoh :

Bentuklah persamaan anggaran seseorang konsumen apabila diketahui pendapatannya berjumlah Rp 100.000, harga barang a Rp 500 / unit dan harga barang b Rp 1.000/unit.

Ditanyakan :

1) Jika semua pendapatan dibelanjakan untuk membeli barang a, maka berapa barang a dapat dibeli ?
2) Berapa unit barang b dapat dibeli kalau ia hanya membeli 100 unit barang a ?

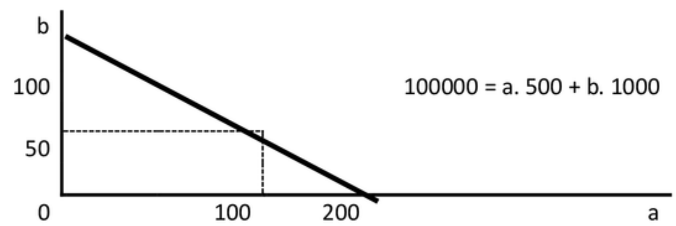
Penyelesaian :

1) M = a. Pa + b. Pb
100.000 = a. 500 + b. 1000
100.000 = 500 a + 1000 b

Jika semua dibelanjakan barang a, maka
100.000 = 500 a + 1.000 b
100.000 = 500 a + 1.000 (0)
100.000 = 500 a + 0
100.000 = 500 a
a = 100.000 / 500
= 200 unit

2) Kalau a hanya beli 100 unit, maka b :
100.000 = 500 a + 1.000 b
100.000 = 500 (100) + 1.000 b
100.000 = 50.000 + 1.000 b
100.000 – 50.000 = 1.000 b
50.000 = 1.000 b
b = 50.000 / 1.000
= 50 unit

Gambar



8. Fungsi konsumsi, Fungsi Tabungan dan Multiplier

Y = C + S

C = f (y) = a + b Y ……………. Fungsi konsumsi

Y = pendapatan nasional

C = konsumsi S = tabungan

a = autonomous consumption

b = MPC = C/Y Y = C + S

S = Y – C = Y – a – bY

= - a + (1 – b) Y ………………… Fungsi tabungan

(1 – b) : MPS = S/Y = 1 – MPS

MPC + MPS = 1

$$\text{Multiplier (k)} = \frac{1}{1 - MPC} = \frac{1}{MPS}$$

Contoh :

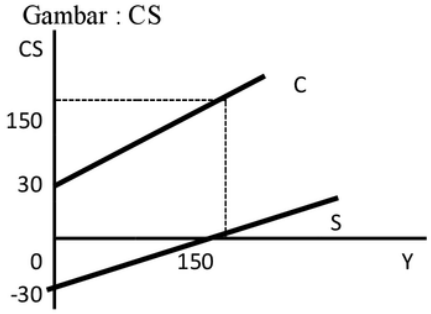
Konsumsi masyarakat Negara ‘Irlandia’ ditunjukkan oleh persamaan C = 30 + 0,8 Y. Ditanyakan :

1) Bagaimana fungsi tabungan ?
2) Berapa besarnya konsumsi tersebut jika besarnya pendapatan nasional 150 ?
3) Berapa besarnya multiplier ?

Penyelesaian :

1) S = Y – C
   = Y – (30 + 0,8 Y)
   = - 30 + 0,2 Y
2) Y = 150
   C = 30 + 0,8 (150)
   = 150
3) $K = \frac{1}{MPS} = \frac{1}{0{,}2} = 5$

Gambar : CS



9. Pendapatan Disposabel

Pendapatan disposabel adalah pendapatan nasional yang secara nyata dapat dibelanjakan oleh masyarakat, tidak termasuk di dalam nya pendapatan pemerintah.

$C = f(Yd)$ — C = konsumsi

$= a + b\,Yd$ — Yd = pendapatan disposabel

- Dalam hal tidak ada pajak dan pembayaran alihan
  $Yd + Y$ — Yd = pendapatan disposabel, Y = pendapatan nasional
- Dalam hal ada pajak
  $Yd = Y - T$ — T = pajak
- Dalam hal ada pembayaran alihan
  $Yd = Y + R$ — R = pembayaran alihan
- Dalam hal ada pajak dan pembayaran alihan
  $Yd = Y - T + R$

Contoh :

Diketahui fungsi konsumsi $C = 30 + 0{,}8\,Yd$

$T = 16$

$r = 6$

Pernyataan : 1) Besarnya pendapatan jika konsumsi 182 ?

2) Berapa besarnya konsumsi jika pendapatan nasional 400 ?

Penyelesaian :

1) Pendapatan nasional

$$Yd = Y - T + R$$
$$= Y - 16 + 6$$
$$= Y - 10$$
$$C = 30 + 0{,}8\,Yd$$
$$= 30 + 0{,}8\,(Y - 10)$$
$$= 30 + 0{,}8\,Y - 8$$
$$= 22 + 0{,}8\,Y$$

Jika $C = 182$ -----------> maka Y = ?

$$C = 22 + 0{,}8\,Y$$
$$182 = 22 + 0{,}8\,Y$$
$$182 - 22 = 0{,}8\,Y$$
$$160 = 0{,}8\,Y$$
$$Y = 160 / 0{,}8 \dashrightarrow Y = 200$$

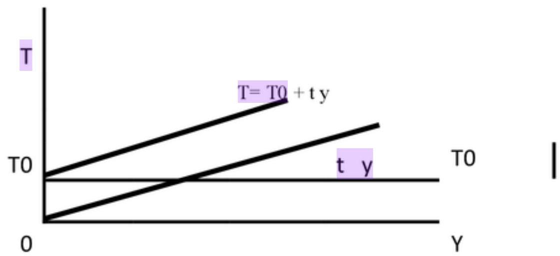
2) Jika $Y = 400$ ----------> maka C = ?

$$C = 22 + 0{,}8\,Y$$
$$= 22 + 0{,}8\,(400)$$
$$= 22 + 320 \dashrightarrow C = 342$$

10. Fungsi pajak

T = To + t Y
T = total pajak
To = autonomous tax (pajak yang besarnya tidak dikaitkan dengan tingkat pendapatan)
t = proporsi pajak terhadap pendapatan
Y = pendapatan

Gambar :

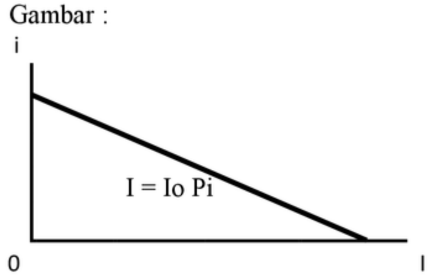


11. Fungsi investasi

Besar kecilnya investasi tergantung tingkat bunga. Maka investasi merupakan fungsi dari tingkat bunga.

I = Io – P i
I = Total investasi
Io = autonomous investment
i = tingkat bunga
P = proporsi investasi terhadap tingkat bunga

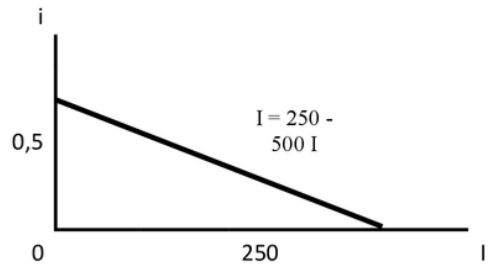
Gambar :



Contoh :
Diketahui persamaan investasi I = 250 – 500 i
Pertanyaan : 1) Besarnya investasi pada tingkat bunga 12% dan 18%
2) Besarnya investasi pada tingkat bunga 30 % dan beri komentar.

Penyelesaian :
1) I = 250 – 500 (0,12) I = 250 – 500 (0,18)
= 250 – 60 -----> I = 190 = 250 – 90 --> I = 160
2) I = 250 – 500 (0,30)
= 250 – 150 ---> I = 100

Gambar :

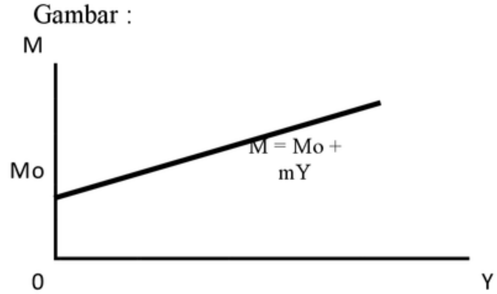


Komentar : Jadi semakin tinggi tingkat bunga semakin kecil nilai investasi

12. Fungsi Impor

M = Mo + m Y
M = total impor
Mo = autonomous import
Y = pendapatan nasional
m = marginal propensity to import

Gambar :



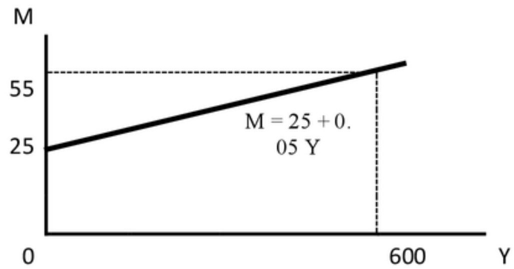
Contoh :

Autonomous import suatu Negara 25 dan marginal propensity to import 0,05. Pertanyaan : Berapa nilai impor jika pendapatan nasional 600 ?

Penyelesaian :

Mo = 25 m = 0,05
M = Mo + m Y M = 25 + 0,05 Y
Jika PN = 600
M = 25 + 0,05 Y
= 25 + 0,05 (600)
= 25 + 30
= 55

Gambar :



13. Pendapatan Nasional

Pendapatan nasional adalah jumlah seluruh nilai output (barang dan jasa) yang dihasilkan oleh suatu Negara selama dalam jangka tertentu.

- Perekonomian 2 sektor Y = C + I
- Perekonomian 3 sektor Y = C + I + G
- Perekonomian 4 sektor Y = C + I + G + (X – M)

Y = Pendapatan nasional
C = konsumsi
I = investasi
G = pengeluaran pemerintahan
X = Ekspor
M = Impor

Contoh :

Diketahui autonomous consumption 500 :
- MPC = 0,8 ; - I = 300 ; - G = 250;
- X = 225; - M = 175

Pertanyaan : Hitunglah pendapatan nasional !
Penyelesaian :

a = 500; b = 0,8; C = a + b. Y
C = 500 + 0,8 Y
Y = C + I + G (X – M)
= 500 + 0,8 Y + 300 + 250 + (225 – 175)
= 1.100 + 0,8 Y ----> Y – 0,8 Y = 1100
0,2 Y = 1100
Y = 5500

SOAL LATIHAN

1. Fungsi permintaan sebuah barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 25 - p$
   a. Gambar kurva permintaannya
   b. Berapa jumlah yang diminta jika barangnya Rp 3 ?
   c. Berapa jumlah yang diminta jika barangnya gratis ?
   d. Berapa harga barang itu jika jumlah yang diminta 10 unit
   e. Berapa harga barang itu jika tidak ada permintaan ?

2. Fungsi penawaran sebuah barang ditunjukkan oleh persamaan $Qs = - 14 + 56 p$
   a. Gambar kurva penawaran ?
   b. Berapa jumlah yang ditawarkan jjika harganya Rp 6 ?
   c. Berapa jumlah minimum agar produsen masih bersedia menjual barangnya ?

3. Funngsi permintaan sandal mitasi dari suatu merek dicerminkan oleh gejala sebagai berikut : jika dijual seharga Rp 500 per pasang , laku sebanyak 300 pasang . sedangkan jika dijual dengan harga Rp 400 per pasang akan laku sebanyak 600 pasang.
   a. Rumuskan fungsi permintaannya, serta gambar kurvanya.
   b. Berapa jumlah pasang sandal yang diminta seandainya barang ini diberikan secara Cuma-Cuma ?
   c. Berapa harga mksimum sepasang sandal tersebut agar masih ada konsumen yang bersedia membelinya ?

4. Sebuah bola basket merek Z bila dijual seharga 30.000 akan laku sejumlah 100.000 buah. Pada setiap kenaikan harga sebesar 10.000, jumlah penjualannya bertambah sebanyak 40.000 buah.
   a. Bagaimana fungsi penawaran bola basket tersebut ?
   b. Gambar grafiknya ?

5. Gejala penawaran sepeda motor merek A ditunjukkan oleh data seperti berikut : pada harga 7.000.000 rupiah ditawarkan sebanyak 10.000 unit, tetapi bila harganya Rp 9.000.000 akan ditawarkan sejumlah 14.000 unit.
   a. Bagaimana fungsi penawaran kendaraan merek A tersebut ?
   b. Gamar grafiknya ?

6. Permintaan mesin cuci merek P adalah sebanyak 50.000 unit pada waktu harganya Rp 4.000.000. pihak produsen mencatat bahwa setiap dilakukan kenaikan harga sebesar Rp 125.000 permintaannya menurun sebanyak 25.000 unit
   a. Bagaimana funngsi permintaannya ?
   b. Gambar grafiknya ?

7. Fungsi penawaran suatu barang kelontong diketahui sebagai berikut :
   $Qs = - 24 + 6 p$
   a. Bagaimana funngsi penawarannya jika terdapat pajak sebesar Rp 6 ?
   b. Bagaimana fungsi penawarannya jika terdapat subsidi sebesar Rp 9 ?

8. Fungsi permintaan atas suatu barang ditunjukkan oleh persamaan Qd = 80 - 12 P, sedangkanpenawarannya Qs = - 16 + 20 p.

a. Berapa harga dan kuantitas keseimbangan yang tercipta ?

b. Gambar grafiknya !

9. Permintaan konsumen akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan p + 28 - 2 Q, dan persamaan oleh produsen ditunjukkan p = 4/3 Q

a. Berapa harga dan kuantitas keseimbangan yang tercipta ?

b. Gambar grafiknya !

10. Suatu barang mempunyai kecenderungan permintaan jika harganya Rp 8, jumlah yang diminati ada 48 unit, tetapi bila harganya naik menjadi harga Rp 20, permintaannya hanya 24 unit, sedangkan jika dilain pihak harganya Rp 8, produsen menawarkan 8 unit. Dan bila harganya naik menjadi Rp 20, produsen menaikkan jumlah yang ditawarkan menjadi 44 unit.

a. Bagaimana fungsi permintaan barang tersebut ?

b. Bagaimana fungsi penawaran barang tersebut ?

c. Berapa harga dan kuantitas keseimbangan barang tersebut dipasar ?

d. Gambar grafiknya !

11. Jumlah permintaan akan suatu barang tercatat sebanyak 52 unit jika harganya 10, sedangkan pada tingkat harga ini produsen hanya bersedia menawarkan barangnya sebanyak 16 unit. Pada setiap kenaikan harga sebesar Rp 20, jumlah permintaan akan menurun sebanyak 40 unit, tetapi jumlah penawarannya akan bertambah sebanyak 80 unit.

a. Bagaimana fungsi permintaan barangtersebut ?

b. Bagaimana fungsi penawaran barangtersebut ?

c. Berapa harga dan kuantitas keseimbangan barang di pasar ?

d. Gambar grafiknya !

12. Permintaan sebuah barang dicerminkan oleh persamaan Qd= 44 – 4 p dan penawarannya, Qs = - 16 + 8 p. Pemerintah menetapkan pajak sebesarRp 12 atas setiap unit barang.

a. Bagaimana keseimbangan pajak sebelum pajak ?

b. Bagaimana keseimbangan pasar setelah pajak ?

c. Berapa pajak yang ditanggung konsumen ?

d. Berapapajak yang ditanggung produsen ?

13. Permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan Qd = 60 - 6 p dan penawarannya Qs = -24 + 6 p. Pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp 6 atas setiap yunit barang yang dijual.

a. Bagaimana keseimbangan sebelum subsidi ?

b. Bagaimana keseimbangan setelah subsidi ?

c. Berapa subsidi yang diminati konsumen ?

d. Berapa subsidi yang dinikmati produsen ?

14. Permintaan akan suatu barang dicerminkan oleh persamaan p = 204 - 12 Q dan penawarannya p = 3 Q + 9

a. Berapa harga dan kuantitas keseimbangan di pasar ?

b. Berapa subsidi yang harus diberikan agar barang tersebut gratis ?

15. Dalam suatu pasar ada dua komodity yaitu A dan B ,diketahui bahwa permintaan terhadap suatu komoditi dipengaruhi oleh harga kedua komoditi tersebut, sedangkan penawaran hanya dipengaruhi oleh harga masing-masing komoditi.

$QdA = 18 - 6\ PA + PB$ $\qquad$ $QdB = 14 - 2PB + PA$

$QsA = -2 + 4\ PA$ $\qquad$ $QsA = -10 + 6\ PB$

Berapa harga dan kuantitas keseimbangan masing-masing komoditi tersebut ?

16. Biaya variable rata-rata yang dikeluarkan oleh seorang produsen adalah 60% dari harga jual produknya, sedangkan biaya tetapnya Rp 300.000. harga jual produk per unit Rp 2000;.

a. Berapa produk yang harus dihasilkan agar produsen tersebut pulang pokok (break even) ?

b. Berapa provit jika memproduksi 4000 unit ?

17. Harga jual suatu barang Rp 500. Biaya tetap rata-rata Rp 100 dan biaya variable rata-rata Rp 250.

a. Berapa unit barang harus dihasilkan jika produsen ingin mendapatkan laba sebesar Rp 60.000

b. Berapa unit barang yang harus dihasilkan agar produsen tidak memperoleh keuntungan dan tidak menderita rugi

c. Berapa barang yang harus dihasilkan kalau ia ternyata merugi sebanyak Rp 15.000

18. Seorang produsen menjual produknya seharga Rp 5.000; per unit. Biaya variable setiap unit 40% dari harga jual, dan biaya tetapnya Rp 3.000.000;.

a. Berapa unit barang harus dihasilkan agar pulang pokok ?

b. Berapa laba jika produk yang terjual 1.000.000 unit ?

c. Berapa unit produk pulang pokok jika harga jual nya naik menjadi Rp7500 ?

19. Seorang peternakan ayam pedaging memelihara 500 ekor ayam. Setelah berusia empat bulan semua ayam nya terjual dengan harga Rp 400/ ekor. Biaya tetap yang dikeluarkan Rp 40.000 sedangkan biaya variable selama 4 bulan tersebut adalah Rp 60.000

a. Tunjukkan fungsi biaya variable, biaya total dan pene

b. Berapa ekor tingkat pulang pokok usahanya ?

c. Bagaimana kalau ia memelihara 175 ekor ?

20. Seorang pedagang memperoleh keuntungan 60.000 dari menjual barang sebanyak 1600 unit. Penerimaan totalnya Rp 480.000, sedangkan biaya tetapnya secara total sebanyak Rp 100.000.

a. Berapa rupiah harga per unit barangnya ?

b. Tentukan fungsi total dan fungsi biaya variable totalnya ?

c. Pada produksi berapa unit pedagang break even ?

d. Gambar grafiknya ?

21. Suatu Negara diketahui fungsi, konsumsinya c = 800 + 0,8 Yd. pajak yang diterima pemerintah ditunjukkan oleh persamaan T= 120 + 0,05Y, sedangkan pembayaran alinan sebesar Rp 360.

a. Jika pendapatan nasional sebesar 10.000 berapa pendapatan disposabel masyarakat ?

b. Berapa besarnya konsumsi, tabungan, dan pajak.

22. Jumlah investasi disuatu Negara sebesar 50.000.000 ketika tingkat bunga 40% dan sebesar 200.000.000 ketika tingkat bunga 10%.

a. Bagaimana fungsi permintaan investasi ?

b. Berapa besar investasi jika tingkat bunga 25% ?

23. Diketahui : c = 20 milyar + 0,75 Yd, I = 48 milyar, G = 60 milyar, T = 10 milyar + 0,05 Y dan R = 6 milyar. Hitunglah :

a. Pendapatan nasional

b. Konsumsi nasional

c. Tabungan nasional

d. Pajak yang diterima negara tersebut

24. Diketahui :

$$
\begin{aligned}
S &= -32 + 0{,}20\ Yd \\
I &= 25 \\
T &= 12 + 0{,}10\ Y \\
X &= 60 \\
G &= 17 \\
M &= 6 + 0{,}20
\end{aligned}
$$

Hitunglah :

a. Pendapatan nasional

b. Pendapatan disposabel

c. Konsumsi dan tabungan

d. Pajak dan impor

BAB III
FUNGSI NON LINIER

PARABOLA

1. Bentuk umum persamaan parabola Y = f (x)

$Y = a\ x^2 + bY + c$ -----------> $P = a\ Q^2 + b\ Q + c$

Jika $a < 0$ parabola membuka kebawah
$a > 0$ parabola membuka keatas
$D = 0$ mempunyai satu titik potong dengan sb Q
$D > 0$ mempunyai dua titik potong dengan sb Q
$D < 0$ tidak mempunyai titik potong dengan sb Q

Contoh :

Diketahui persamaan $p = -3\ Q^2 + 39$

* $a < 0$ parabola membuka kebawah,titik ekstrim diatas

* $\boxed{D = b^2 - 4\ a\ c}$ --> $D = 0^2 - \{ 4\ .\ (-3)\ .\ 39 \}$
$= 468$
$D > 0$ mempunyai 2 titik potong dengan sb Q

* Titik puncak

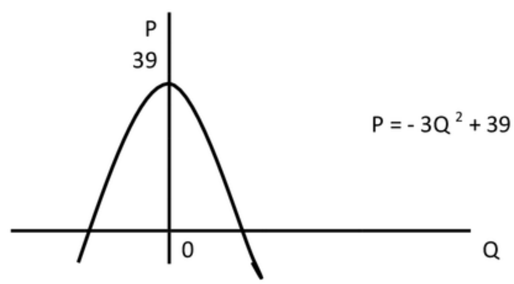
(Q, P) -----------> $\boxed{\left(\frac{-b}{2a} , \frac{-D}{4a} \right)}$

$Q = \frac{0}{2\ .\ -3}$ $\qquad$ $P = \frac{-468}{4\ .\ (-3)}$

$Q = 0$ $\qquad$ $P = 39$

Jadi titik puncak adalah (0, 39)

* Gambar :



2. Bentuk umum persamaan parabola x = f (y)

$x = a\ y^2 + b\ y + c$ ---------> $Q = a\ p^2 + b\ P + c$

Jika $a > 0$ parabola membuka kekiri
$a < 0$ parabola membuka kekanan
$D = 0$ mempunyai satu titik potong dengan sumbu P
$D < 0$ tidak punya titik potong dengan sb P

$D > 0$ mempunyai dua titik potong dengan sumbu P

Contoh :

Diketahui persamaan $Q = p^2 - 1$

* $D = b^2 - a\ c$
  $= 0 - 4 . 1 . - 1$
  $= 4$
  Jadi $D > 0$ maka parabola mempunyai dua titik potong dengan sumbu P
* Titik puncak

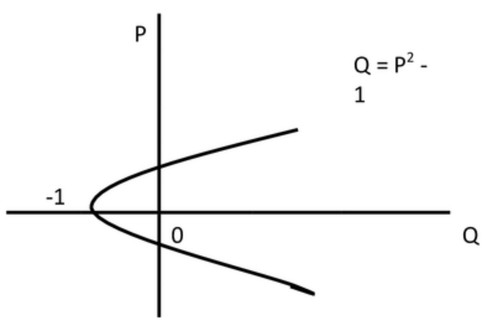
$$(Q , P) \dashrightarrow \boxed{\left(\frac{-D}{4a} , \frac{-b}{2a} \right)}$$

$$Q = \frac{-4}{4 . 1} = -1$$

$\dashrightarrow$ Titik puncak (-1 , 0)

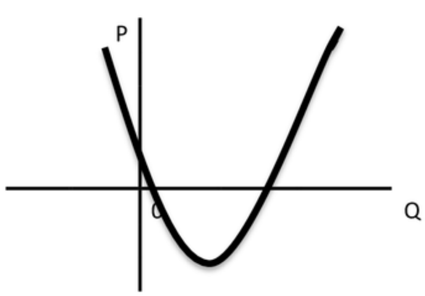
$$P = \frac{0}{2 . 1} = 0$$

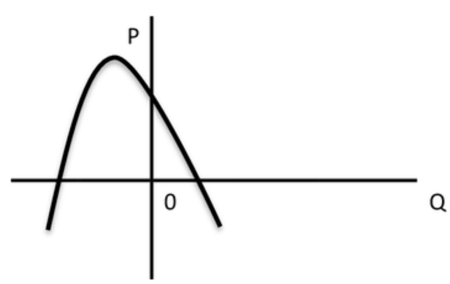
* Gambar



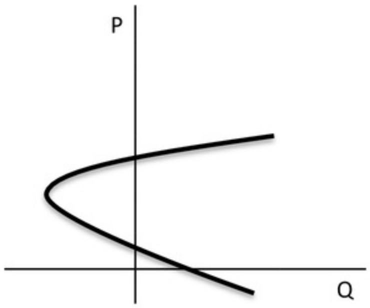
3. Fungsi permintan dan penawaran

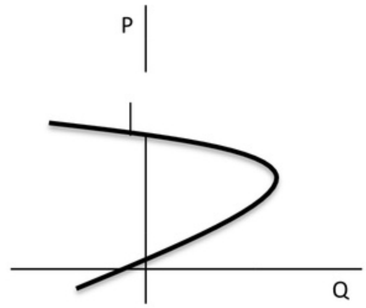
Fungsi permintaan $P = f (Q)$





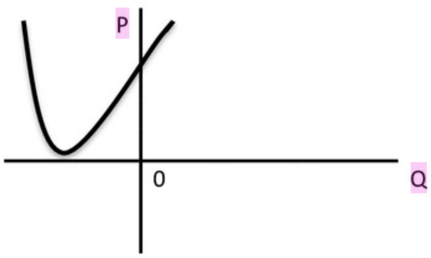
Fungsi Permintaan Q = f (P)

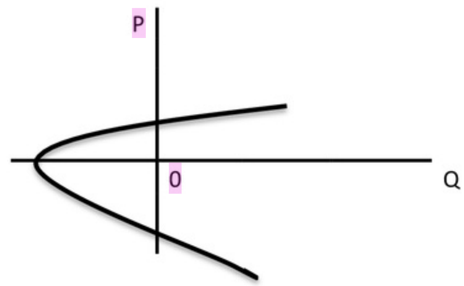




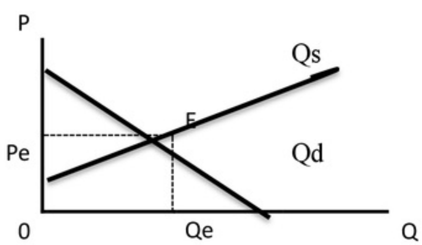
Fungsi Permintaan Q = f (P)

Fungsi Penawaran Q = f (P)





4. **Keseimbangan pasar**
   Keseimbangan pasar terjadi apabila Qd = Qs



Contoh 1 :

Diketahui persamaan D : $P = Q^2 - 17\,Q + 72$ dan

S : $P = Q^2 + Q$

Diminta : 1) Hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan pasar !

2) Gambar grafiknya ?

Penyelesaian :

1) Keseimbangan pasar syaratnya Qd = Qs

$$Q^2 - 17\,Q + 72 = Q^2 + Q$$
$$Q^2 - Q^2 - 17\,Q - Q = -72$$
$$-18\,Q = -72$$
$$Q = -72 / -18$$
$$Q = 4$$

$Q = 4$ maka p dapat dihitung sebagai berikut :

$$P = Q^2 + Q$$
$$= 4^2 + 4$$
$$= 16 + 4 \quad \text{--->} \quad P = 20$$

Jadi keseimbangann pasar terjadi pada : (4 , 20)

2) Gambar

Fungsi permintaan $\qquad P = Q^2 - 17\,Q + 72$

* -- $a > 0$ parabola membuka keatas

* -- $D = b^2 - 4\,a\,c$
$$= 17^2 - 4\,.\,1\,.\,72$$
$$= 289 - 288$$
$$= 1 \text{ ----> } D > 0$$ mempunyai dua titik potong dengan sb Q

* titik puncak (Q, P) -------------> $\left(\dfrac{-b}{2a} , \dfrac{-D}{4a} \right)$

$$Q = \frac{-B}{2a} = \frac{17}{2\,.\,1} = 8{,}5$$

$$P = \frac{-D}{4a} = \frac{-1}{4\,.\,1} = -1/4$$

Fungsi penawaran $\qquad P = Q^2 + Q$

* ----> $a > 0$ parabola membukan keatas

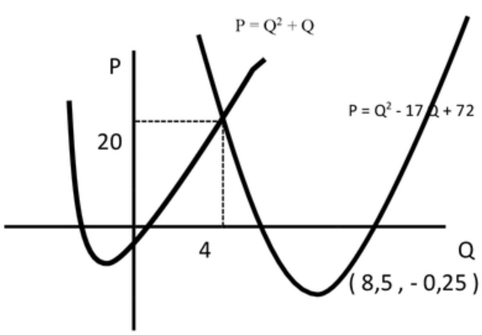
* ----> $D = 1^2 - 4\,.\,1\,.\,0$ ----> $D = 1$

$D > 0$ maka parabola tidak mempunyai titik potong dengan sumbu Q

* Titik puncak (Q , P) ----- $\left(\dfrac{-B}{2a} , \dfrac{-D}{4a} \right)$

$$Q = \frac{-1}{2\,.\,1} = \frac{-1}{2}$$

$$P = \frac{-1}{4\,.\,1} = -1/4$$



Contoh 2 :

Diketahui persamaan permintaan dan penawaran :
$P = Q^2 - 15Q + 63$ dan $P = 5/4\ Q^2 + 15/4$. hitung harga & kuantitas keseimbangan serta gambar grafiknya !
penyelesaian :

1) Keseimbangan pasar Qd = Qs

$$Q^2 - 15\ Q + 63 = 5/4\ Q^2 + 15/4 \quad x \quad 4$$

$$4\ Q^2 - 60\ Q + 252 = 5\ Q^2 + 15$$

$$4\ Q^2 - 5\,Q^2 - 60\ Q + 252 - 15 = 0$$

$$- \quad Q^2 - 60\ Q + 237 = 0$$
$$Q^2 + 60\ Q - 237 = 0$$

$Q_{12} = \dfrac{-b +-}{2a}$

$= \dfrac{-60 + -}{2.1}$

$= \dfrac{-60 + -}{2}$

$= \dfrac{-60 + - 67,44}{2}$

$= \dfrac{- 60 +- 67,44}{2}$

$Q_1 = \underline{-60 +- 67,44}$ =3,72 memenuhi

$Q_2 = \underline{-60 -67,44}$ = -63,72 tidak memenuhi

Q =3 ,72 maka p = ? → $Q^2 - 15\ Q + 63$

$= 3,72^2 – 15\ (3,72) + 63$

$=13,69 - 55,5 + 63$

$=21,2$

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada harga Rp 21 dan kuantitas 4 unit (dibulatkan)

2) Gambar Grafik

<u>Fungsi permintaan</u>

$P = Q^2 -15\ Q + 63$
$*D = 15^2 – 4.\ 1.\ 63$
$= -27$

<u>Fungsi penawaran</u>

$P = 5/4\ Q^2 + 15/4$
$*D = 0^2 -4.\ 5/4.\ 15/4$
$= -18,75$

*Titik puncak

$Q = \frac{-b}{2\,a} = \frac{15}{2.1} = 7{,}5$

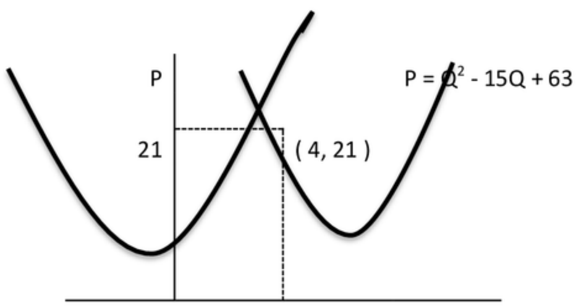
$P = \frac{-\ D}{4.\,a} = \frac{27}{4.5/4} = 6{,}75$

$P = 5/4\ Q^2 + 15/4$

*Titik puncak

$Q = \frac{0}{2.5/} = 0$

$Q = \frac{18{,}75}{4.\,5/4} = 3{,}75$



Contoh 3 :

Diketahui persamaan permintaan dan penawaran sebagai berikut :

$D \rightarrow Q = 49 - P^2$ dan $S \rightarrow Q = P^2 - 1$

Diminta :

1) Hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan !
2) Gambar grafiknya !

   Penyelesaian :

   1) Syarat keseimbangan Qd = Qs

      $49 - P^2 = P^2 - 1$

      $- \quad P^2 - P^2 = -1 - 49$

      $- \quad 2\,P^2 = -50$

      $P^2 = 25$

      $P = 5$

      P = 5 maka Q = ?

      $Q = P^2 - 1$

      $= 5^5 - 1$

      $= 25 - 1$

      $= 24$

3) Gambar

   Fungsi permintaan

   $Q = 49 - P^2$

   *a < 0 membuka kekiri

   $*D = 0^2 - 4\,.-1\,.\,49$

   $= 196$

   D > 0 mempunyai 2 titik potong dengan sb P

   Fungsi penawaran

   $Q = P^2 - 1$

   *a > 0 membuka kekanan

   $*D = 0^2 - 4\,.\,1\,.\,-1$

   $= 4$

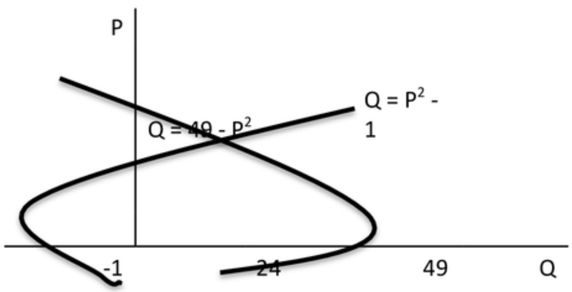
   D > 0 mempunyai 2 titik potong dengan sb P

*Titik puncak   *Titik puncak

(Q , P) --------- $\left(\frac{-D}{4a} , \frac{-b}{2a} \right)$

$Q = \frac{-196}{4. -1} = 49$ $Q = \frac{-4}{4.1} = -1$

$P = \frac{0}{2} = 0$ $P = \frac{0}{2 . 1} = 0$



5. Pengaruh pajak dan subsidi

Contoh 1 :

$P = Q^2 - 17 Q + 72$ dan $P = Q^2 + Q$ mencerminkan fungsi permintaan dan penawaran suatu barang. Terhadap barang ini dikenakan pajak Rp 3,6 per unit.

Diminta : 1) Hitung harga dan kuantitas keseimbangan !

2) Gambar grafiknya

Penyelesaian :

1) – Keseimbangan pasar sebelum pajak D = S

$Q - 17 Q + 72 = Q^2 + Q$ $P = ?$

$Q^2 - Q^2 - 17 Q = - 72$ $P = Q^2 +$

$- 18 Q = - 72$ $= 4^2 + 4$

$Q = 4$ $= 20$

-Keseimbangan setelah pajak D = S

$S : P = Q^2 = Q$ ---------------→ $S' : P = Q^2 + Q + 3,6$

$D = S$

$Q^2 - 17 Q + 72 = Q^2 + Q = 3,6$

$Q^2 - Q^2 - 17 Q - Q = - 72 + 3,6$

$-18 Q = -68,4$

$Q = - 68,4 / -8$

$Q = 3,8$

$Q = 3,8$ maka $P = ?$

$P = Q^2 + Q + 3,6$

$P = 3,8^2 + 3,8 + 3,6$

$= 21,84$

Keseimbangan pasar sebelum pajak (4,20) dan keseimbangan pasar setelah pajak (3,8 , 21,84)

2) Gambar

Fungsi Permintaan

D : P = $Q^2 - 17\,Q + 72$

*a > 0 membuka keatas

*D = $17^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 72 = 1$

D > 0 mempunyai 2 titik potong
Dengan Sb Q

*Titik puncak

$Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-17)}{2 \,.\, 1} = 8{,}5$

$P = \frac{-D}{4a} = \frac{1}{4 \,.\, 1} = \_\, ¼$

Fungsi Penawaran

S : P = $Q^2 + Q$

*a > 0 membuka keatas

*D = $1^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 0 = 1$

D > 0 mempunyai 2 titik
potong dengan Sb Q

*Titik puncak

$Q = \frac{-1}{2 \,.\, 1} = -1/2$

$P = \frac{-1}{4 \,.\, 1} = \underline{-¼}$

Fungsi penawaran setelah pajak

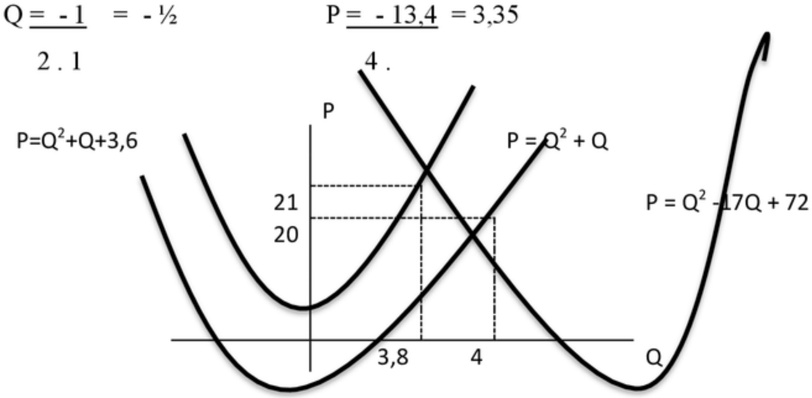
S' : P = $Q^2 + Q + 3{,}6$ *a > 0 (membuka keatas)

*D = $1^2 + 4 \,.\, 1 \,.3 \,.\, 6$

= - 13,4 ---------------> D < 0 tidak mempunyai titik potong dengan sb Q

*Titik puncak

$Q = \frac{-1}{2 \,.\, 1} = -½$ $P = \frac{-13{,}4}{4\,.} = 3{,}35$



Contoh 3 :

Diketahui fungsi permintaan dan penawaran :

$P = Q^2 - 10\,Q + 25$ dan $P = Q^2 + 2\,Q + 3$

Terhadap barang tersebut Dikenakan subsidi Rp 2 ? unit.

Pertanyaan :1) Hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi !
2) Hitung besarnya subsidi yang diberikan pemerintah !
3) Gambar grafiknya !

Penyelesaian :

1) Keseimbangan pasar sebelum subsidi D = S

$$Q^2 - 10\,Q + 25 = Q^2 + 2\,Q = 3$$
$$Q^2 - Q^2 - 10\,Q - 2Q = 3 - 25$$
$$-\ 12\,Q = -\,22$$
$$Q = 1\,,83$$

Q = 1 , 83 maka P = ?

$$P = Q^2 + 2\,Q + 3$$
$$= 1\,,8^2 + 2\,(\,1\,,\,8\,) + 3$$
$$= 9\,,72$$

-Keseimbangan setelah subsidi D = S'

S : $P = Q^2 + 2\,Q = 3$ -----------› S' : $P = Q^2 + 2\,Q + 1$

D = S' -----› $Q^2 - 10\,Q - 2\,Q \quad = Q^2 + 2\,Q + 1$

$$Q^2 + Q^2 - 10\,Q - 2\,Q = 1 - 25$$
$$Q = -\,25$$
$$Q = -\,24\,/\,-\,12$$
$$Q = 2$$

Q = 2 maka P = ?

$$P = Q^2 + 2\,Q = 1$$
$$= 2^2 = 2\,(\,2\,) + 1$$
$$= 9$$

2) Besarnya subsidi :

Q' = (Q setelah subsidi) x besarnya subsidi / unit.

Total subsidi = 2 x 2 --› Total subsidi = Rp. 4,-

3) Gambar

D : $P = Q^2 + 10\,Q + 25$

*a > 0 membuka keatas

*D = $10^2 - 4.\ 1.\ 25 = 0$

S : $P = Q^2 + 2\,Q = 3$

*a > 0 membuka keatas

*D = $2^2 - 4.\ 1.\ 3 = 8$

D = 0 mempunyai satu titik potong Q

D < 0 tidak punya titik potong Dengan sumbu dengan sumbu Q

*Titik puncak

$Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2.1} = 5$

$P = \frac{-D}{4a} = \frac{-0}{4.1} = 0$

S' : $P = Q^2 + 2Q + 1$

*a > 0 membuka keatas

* $D = 2^2 - 4.1.1$

* $D = 2^2 - 4.1.1 = 0$

D = 0 -› mempunyai satu titik potong dengan sb Q

*Titik puncak

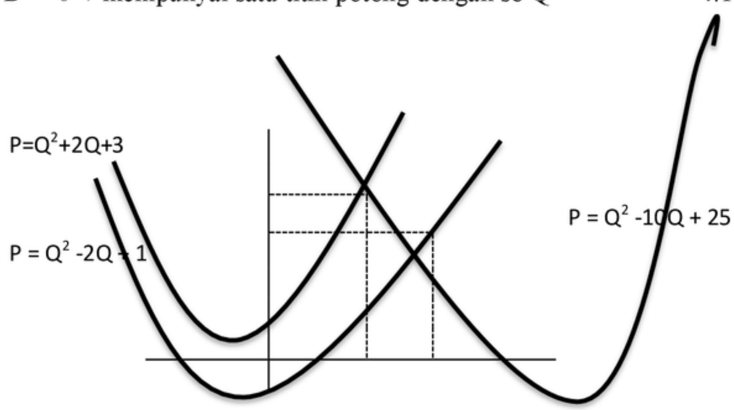
$Q = \frac{-2}{2.1} = -1$

$p = \frac{-(-8)}{4.1} = 2$

*Titik puncak

$Q = \frac{-2}{2.1} = -1$

$P = \frac{-0}{4.1} = 0$



Contoh 3 :

$P = Q^2 - 15Q + 63$ dan $P = Q^2 + 3$ mencerminkan fungsi permintaan dan penawaran suatu barang . Terhadap barang tersebut dikenakan pajak 25%. Diminta :
1) Hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan ;
2) Hitunglah pajak per unit ;
3) Hitunglah besarnya penerimaan pemerintah ;
4) Pajak yang ditanggung konsumen dan produsen ;
5) Gambar grafiknya

Penyelesaian :

1) -Keseimbangan sebelum pajak

D = S ---› $Q^2 - 15Q + 63 = Q^2 + 3$

$Q^2 - Q^2 - 15Q = -60$

$-15Q = -60$

$Q = -60 / -15$

$Q = 4$

$Q = 4$ maka $P = ?$

$P = Q^2 = 3$

$= 4^2 + 3$

$= 19$

-Keseimbangan sesudah pajak D = S'

$S : P = Q^2 + 3$

$S' : P = (Q^2 + 3)(1 + r)$

$= (Q^2 + 3)(1 + 2\ 5\ \%)$

$= (Q^2 + 3)(1 + 0{,}25)$

$= (Q^2 = 3)(1{,}25)$

$= 5/4\ Q^2 + 15/4$

$D = S'$ ------› $Q^2 – 15\ Q + 63 = 5/4,\ Q^2\ +15/4$

$4\ Q^2 – 60\ Q + 252 = 5\ Q^2 + 15$

$4Q^2 – 5\ Q^2 – 60\ Q + 252 – 15 = 0$

$-Q^2 – 60\ Q – 237 – 15 = 0$

$Q^2 + 60\ Q – 237 = 0$

$= \dfrac{-\ 6b +-\ b\ 2 – 4\ a\ c}{2}$

$= \dfrac{-\ 60 +-\ 67{,}44}{2}$

$Q_1 = \dfrac{-\ 60 + 67{,}44}{2} = 3.72$ memenuhi

$Q_2 = \dfrac{-\ 60 – 67{,}44}{2} = -\ 63,\ 72$ tidak memenuhi

$Q = 3,\ 72$ maka $P = ?$

$P = 5/4\ Q^2 + 15/4$

$= 5/4\ (\ 3{,}72^2\ ) + 15/4$

$= 17{,}289 + 3{,}75$

$= 21{,}048$

4) Pajak per unit

$t/unit = \dfrac{r}{1 + r}\ P$

$= \dfrac{25\%}{1 + 25\%}\ P$

$= \dfrac{0.\ 25}{1{,}25}\ 21{,}048$ --› t/unit = 4,2

5) Penerimaan pemerintah = Q' x t/unit = 3,72 x 4, 2

Pajak yang ditanggung konsumen

(P' – P) x Q'

(21,048 – 19) x 3, 72

(2,048) 3, 72 = 7,62

-Pajak yang ditanggung produsen

= (total pajak) – (pajak yang ditanggung konsumen)

= 15, 524 – 7,62

= 8,004

6) Gambar

D : $P = Q^2 - 15\,q + 63$

*a > 0 membuka keatas

*$D = 15^2 - 4.\,1.\,63 = -27$

D < 0 tidak punya titik potong
Dengan sb Q

*Titik puncak

$Q = \dfrac{-(-15)}{2\,.\,1} = 7{,}5$

$P = \dfrac{-(-27)}{4\,.\,1} = 6{,}\ 75$

S : $P = Q^2 + 3$

*a > 0 membuka keatas

*$D = 0^2 - 4.\,1.\,3 = -12$

D < 0 tidak punya titik potong
dengan sb Q

*Titik puncak

$Q = \dfrac{-0}{2\,.\,1} = 0$

$Q = \dfrac{-(-12)}{4\,.\,1} = 3$

S' : $P = 5/4\,Q^2 + 15/4$

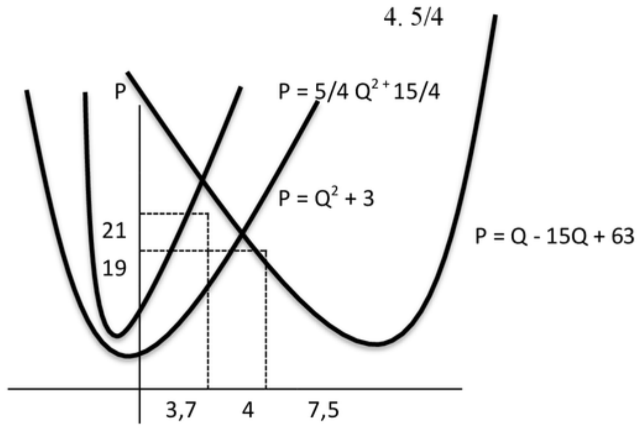
*a > 0 membuka keatas

*$D = 0^2 - 4.\ 5/4.\ 15/4$

= - 18,75 ------------- D < 0 tidak punya titik potong dengan sumbu Q

*Titik puncak

$Q = \dfrac{-0}{2.\ 5/4} = 0$ $\qquad$ $P = \dfrac{-(-18,75)}{4.\ 5/4} = 4{,}69$



6. Fungsi Biaya

$C = a\,Q^2 - b\,Q + c$

$FC = c$

$VC = a\,Q^2 - b\,Q$

$AC = a\,Q - b + c/Q$

$AFC = c\,/\,Q$

$AVC = a\,Q - b$

Contoh : Diketahui $C = 2\,Q^2 - 24\,Q + 100$

1) Pada tingkat produksi berapa unit biaya total minimum ?
   C minimun pada Q = - b/2 a ---- Q = 24/2 . 2 = 6 unit
2) Berapa biaya total minimum ?
   $C = 2\,(6^2) - 24\,(6) + 100 = 28$
3) Berapa besarnya biaya tetap ?
   Fc = 100
4) Berapa besarnya biaya variabel ?
   Vc = c – pc
   = 28 / - 100
   = - 72
5) Berapa rata-rata biaya ?
   Ac = 28 /6 =4,67
6) Berap rata-rata biaya tetap ?
   Afc = 100 / 6 =16 , 67
7) Berapa rata-rata biaya variabel ?
8) Avc = -72 / 6 = - 12

7. Fungsi penerimaan

R = f (q) = q x p
Ar = R / Q .... R = AR x Q .... AR = P
Mr = d R / d Q

Contoh :

Penerimaan yang dihadapi seseorang produsen Q = 8 – 0,5P pertanyaannya :

1) Bentuklah fungsi penerimaan !

   $Q = 8 - 0{,}5\,P \dashrightarrow -0{,}5\,P = Q - 8$
   $P = -2\,Q + 16$

   Funsi penerimaan : R = Q x P
   = Q (- 2 Q = 16 Q)
   = $-2\,Q^2 + 16\,Q$
2) Berapa tingkat produksi maksimum ?
   Tingkat produksi maksimum terjadi pada Q = - b/2 . a
   Maka tingkat produksi maksimum Q = - 16 / -4 = 4 unit

3) Berapa penerimaan totalnya ?
   $R = -2\,Q^2 + 16\,Q \dashrightarrow R = -2\,(4^2) + 16\,(4)$
   = 32
4) Berapa penerimaan rata-ratanya ?
   AR = 32 / 4
   = 8

8. Keuntungan , kerugian dan pulang pokok

- $R = c$ ------------→ Pulang pokok
- $R < c$ ------------→ Rugi
- $R > c$ ------------→ Laba

Contoh :

$R = -0,10\,Q^2 + 20\,Q$ dan $c = 0,25\,Q^3 - 3\,Q^2 + 7\,Q + 20$

Hitunglah fungsi persamaan dan biaya sebuah perusahaan.
Hitunglah keuntungan perusahaan jika output yang terjual 10 unit.
Penyelesaian :

$Q = 10$ unit
$R = -0,10\,Q^2 + 20\,Q$
$R = -0,10\,(10^2) + 20\,(10)$
$= -10 + 200$
$= 190$
$C = 0,25\,Q^3 - 3\,Q^2 + 7\,Q + 20$
$= 0,25\,(10^3) - 3\,(10^2) + 7\,(10) + 20$
$= 40$
Laba $= R - C$
$= 190 - 40$
$= 150$

Soal Latihan

1. Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q = 80 - 2P^2$ dan penawarannya $Q = -120 + 6P^2$
   a. Hitung harga dan kuantitas keseimbangan di pasar ?
   b. Gambar Grafiknya.
2. Seandainya kasus soal nomor satu diatas terhadap tiap unit barang yang dijual dikenakan pajak sebesar 2 rupiah , maka hitunglah :
   a. Harga dan kuantitas keseimbangam yang baru ?
   b. Berapa pajak yang ditanggung konsumen ?
   c. Berapa pajak yang ditanggung produsen ?
   d. Berapa pajak yang diterima pemerintah ?
3. Fungsi penawaran terhadap sutau barang dicerminkan oleh persamaan $Q = -14 + P^2$ dan permintaan $Q = 10 - 0,5P^2$
   a. Hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan yang tercipta ?
   b. Gambar grafiknya /
4. Seandainya dalam kasus soal nomor 3 diatas terhadap tiap unit barang yang dijual diberikan subsidi sebesar Rp 1.
   a. Hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan yang baru ?
   b. Berapa subsidi yang dinikmati konsumen ?
   c. Berap subsidi yang dinikmati produsen ?
   d. Berapa total subsidi yang diberikan pemerintah ?
5. Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan dicerminkan oleh persamaan :
   $C = Q^2 - 200Q + 17.000$
   a. Berapa besarnya biaya total jika perusahaan memproduksi 99 unit barang ?
   b. Hitunglah biaya tetap , biaya variabel , biaya rata-rata , biaya tetap rata-rata , dan biaya variabel rata-rata ?
   c. Berapa tingkat produksi yang mencapai biaya total yang minimal ?
   d. Dan berapa biaya marjinalnya ?
6. Fungsi penerimaan yang dihadapi seorang porodusen dicerminkan oleh persamaan :
   $R = 9.000\,Q - 30\,Q^2$
   a. Jika perusahaan menghasilkan 100 unit berapa penerimaan total dan penerimaan rata-ratanya ?
   b. Berapa tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum ?
   c. Berapa besarnya penerimaan total maksimum tersebut ?
   d. Dan berapa penerimaan marjinalnya ?
7. Seorang produsen menghadapi fungsi peremintaan berikut :
   $Q = 1000 - P$
   a. Bagaimana fungsi penerimaanya ?
   b. Berapa tingkat produksi yang menghasilkan total maksimum ?
   c. Berapa besarnya total penerimaan total maksimum tesebut ?
   d. Berapa penerimaan marjinalnya ?
8. Penerimaan total yang dihadapi oleh seorean produsen ditunjukkan oleh persamaan :
   $R = -6Q^2 + 1500$, sedangkan biaya total yang dikeluarkan dicerminkan oleh persamaan
   $C = 10\,Q^2 - 2000\,Q + 170.000$
   a. Berapa tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum ?
   b. Berapa besarnya penerimaan total maksimum tesebut ?
   c. Berapa tingkat produksi yang mencapai total biaya minimum ?
   d. Berapa besarnya biaya total minimum tersebut ?
   e. Keuntungan atau kerugian , jika memproduksi 200 unit ?
   f. Berapa unit yang harus dihasilkan jika perusahaan menginginkan laba sebesar Rp 100.000;

g. Berapa tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum ? berapa keuntungan maksimumnya ?

9. Output suatu perusahaan akan terjual sebanyak 2000 unit jika harga jual Rp 100 per unit, tetapi hanya akaan terjual sebanyak 1500 unit ? jika harga jual per unit dinaikkan menjadi Rp 150 ,. Biaya total yang dileluarkan oleh perusahaan dicerminkan : $C = 0,3Q^2 - 720Q + 600.000$
   a. Bagaimana fungsi permintaan yang dihadapi perusahaan ?
   b. Bagaimana fungsi penerimaanya ?
   c. Bagaimana kalau perusahaan menghasilkan 750 unit ?
   d. Bagaimana kalau perusahaan menghasilkan 1.250 ?
   e. Berapa tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum ?
   f. Berapa besranya penerimaan total maksimum tersebut ?
   g. Berapa tingkat produksi yang menunjukkan biaya total minimum ?
   h. Berapa besarnya biaya total minimum tersebut ?
   i. Mana yang lebih menguntungkan memprodulsi pada tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum atau biaya total minimum ?
   j. Berapa tingkat produksi yang menghasilkan tingkat keuntungan maksimum ?
   k. Berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut ?

BAB IV
DIFERENSIAL
DALAM TERAPAN EKONOMI

Teori diferensial amat lajim diterapkan dalam konsep elastisitas dan konsep nilai marjinal . Dalam kaitannya dengan konsep elastisitas , pada bab ini secara berurutan akan dibahas penerapan diferensial dalam perhitungan elastisitas permintaan , elastisitas penawaran dan elastisitas produksi. Sedangkan kaitannya dengan konsep nilai marjinal , akan dibahas penerapan diferensial dalam pencarian fungsi atau perhitungan biya marjinal, penerimaan marjinal, produk marjinal & utilitas marjinal. Juga dibahas , hubungan antara nilai total, nilai marjinal dan nilai rata-rata.

1. Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan (istilahnya yang lengkap : elastisitas harga permintaan , price elasticity of demand) adalah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga. Jadi merupakan rasio antara prosentase perubahan jumlah barang yang diminta dan prosentase perubahan harga. Jika fungsi permintaan dinyatakan dengan Qd = f (p) maka elastisitas permintaanya :

$$E_D = \frac{\% \Delta Q}{\% \Delta P} = \frac{E\,Qd}{EP} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{(\Delta Qd / Qd)}{(\Delta P / P)} = \frac{d\,Qd}{dP} \cdot \frac{P}{Qd}$$

Dimana $\frac{D\,Qd}{dP}$ tak lain adalah Q ` d atau f (p)

Contoh 1 :
Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q = 50 - 3P^2$. Hitung elastisitas permintaannya pada tingkat harga P = 5 !

$Q_d = 50 - 3P^2$ $e_d = \frac{d\,QD}{dP} \cdot \frac{P}{Qd} = -6P\,\frac{P}{50 - 3P}\;2$

$Q = \frac{d\,Qd}{Dp} = -6P$ $= -6(5) \cdot \frac{5}{50 - 75}$ 6.

Contoh 2 :

Permintaan suatu komoditi dicerminkan oleh D = 4 – P , dimana D adalah jumlah komoditi yang diminta & P adalah harga komoditi per unit. Hitunglah elastisitas permintaanya pada tingkat harga P = 3 & permintaan D = 3

d = 4 – P , D` = dD / dP = - 1, Pada P = 3
Maka D = 4 – 3 = 1

Sehingga :

$E_d = (dD/dP)\ (P/D) = (-1)\ (3/1) = -3$

$D = 4 - P,\quad P = 4 - D,$ Pada $D = 3$
Maka $P = 4 - 3 = 1$

Sehingga :

$E_d = (dD/dP)\ (P/D) = (-1)\ (1/3) = -\ 1/3$

Catatan :

Dalam konsep elastisitas permintaan permintaan , yang dipentingkan adalah besarnya angka hasil perhitungan ; apakah angka tersebut sama dengan ataukah lebih besar atau lebih kecil dari satu , yakni untuk menentukan apakah sifat permintaanya elastic uniter , elastic ataukah inelastis . Sedangkan tanda didepan angka hasil perhitungan dapat diabaikan , karena hal itu sekedar mencerminkan berlakunya hukum permintaan .

Contoh 3 :

$D = 800 - 4P^2$ adalah fungsi yang mencerminkan pola permintaan suatu barang . Jelaskan bagaimana sifat permintaan atas barang tersebut ; elastic , inelastic atau unitaryelastic ; pada tingkat harga P = 10 & permintaan D = 224.

$D = 800 - 4P^2 \qquad D` = dD/dP = -8P$

Pada $p = 10$, maka $D = 800 - 4(10)^2 = 400$ & $D` = -8(10) = -80$

$E_d = (Dd/Dp)\ (P/D) = (-80)\ (10/400) = -2 = 2$
elastic

Pada $d = 224$, maka $224 = 800 - 4P^2$ ---► diperoleh $P = 12$
Selanjutnya $D` = -8\ (12) = -96$
$E_d = (dD/dP)\ (P/D) = (-96)\ (12/224) = -5,14 = 5,14$
elastic

2. Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran (istilahnya yang lengkap : elastisitas harga penawaran , price elasticity of supply) ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah barang yang ditawarkan akibat adanya perubahan harga . Jadi merupakan rasio antara prosentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan dan prosentase perubahan harga . Jika fungsi penawarkan dinyatakan dengan $Qs = f(p)$, maka elastisitas penawaran :

$$e_s = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta Q} = \frac{E\,Q}{E\,Q} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta(Qs/Qs)}{(P/P)} = \frac{dQ}{d}\cdot\frac{P}{Q}$$

Contoh 1 :

QS = - 200 + 7 P ^{2} adalah pencerminan fungsi penawaran suatu barang . Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga P = 10 dan P = 15 ?

Q_s = - 200 + 7 P ^{2} ------▶ Q_s = dQ_s / dP = 14 P

E_s = (dq_s / dp) (p / q_s) = (14 p) { p / (- 200 + 7 P^2) }

Pada P = 10, e_s = [140 { 10 / (- 200 + 700) }] = 2 , 8

Pada P = 15, e = [210 { 15 / (- 200 + 1575) }] = 2 , 3

Contoh 2:

Jika fungsi penawaran s = - 50 = 3 p^2, Hitunglah elastisitas Penawarannya pada tingkat harga p = 10 dan tingkat penawaran s = 193.

s = - 50 + 3 p^2 s` = dS / dP = 6 p pada p = 10, Maka

s = - 50 + 3 (10^2) = 250 dan s` 6 (10) = 60

e_s = (dS / dP) (P/S = (60) (10 / 250) = 2,4

Pada s = 193 , Maka 193 = - 50 + 3p^2 --▶diperoleh P = 9

Selanjutnya S ` = 6 P = 6 (9) = 54

E_s – (dS / dP) (P / S) = (54) (9 / 193) = 2 , 5

3. Elastisitas Produksi

Elastisitas produksi adalah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah output yang dihasilkan akibat adanya perubahan jumlah input yang digunakan . Jadi merupakan rasio prosentase perubahan jumlah output dengan prosentase jumlah input . Jika P melambangkan jumlah output & X melambangkan jumlah input serta fungsi produksi dinyatakan dengan P = f (X) , maka elastisitas produksinya adalah :

$$e = \frac{\% \; P}{\% \triangle X} = \frac{EP}{EX} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(\triangle P / P)}{(\triangle X / X)} = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P}$$

Dimana dP / dX adalah marjinal product (P`)

Contoh 1 :

Fungsi produksi suatu komoditi P = 6 x ^{2} – x ^{3} merupakan persamaan yang diketahui . Hitung elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan input sebanyak 3 unit & 7 unit.

p = 6 x ^{2} - x ^{3} --▶ p = dP / dX = 12 x – 3 x ^{2}

e_p = (dP/dX) (x/p) = (12x – 3x ^{2}) { x / (6x ^{2} – x ^{3}) }

$$\text{Pada } x = 3,\ e_p = (36 - 27)\ \frac{3}{54 - 27} = 1$$

$$\text{Pada } x = 7,\ e_p = (84 - 147)\ \frac{7}{294 - 343} = 9$$

Contoh 2 :

$P = 3x^2 - 2x^3$ dinyatakan sebagai fungsi produksi suatu komoditas barang dimana P melambangkan produl atau output dan X melambangkan input . Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan input sebanyak 4 unit dan 10 unit.

$p = 3x^2 - 2x^3 \quad p` = dP/dX = 6x - 6x^2$

pada $x = 4$, maka $p = 3(4)^2 - 2(4)^3 = -80$ dan $p` = -72$

$e_p = (dP/dX)\ (X/P) = (-72)\ (4/-80) \dashrightarrow e_p = 3{,}6$

Pada $x = 10$, maka $p = -1700$ dan $p` = -540$

$E_p = (dP/dX)\ (X/P) = (-540)\ (10/-1700) \dashrightarrow e_p = 3{,}2$

4. <u>Biaya Marjinal</u>

Biaya marjinal (marginal cost , MC) ialah biaya tambahan output . Secara matematis , fungsi biaya marjinal adalah derivatif pertama dari fungsi biaya total . Jika fungsi biaya total dinyatakan dengan c = f (Q) dimana c adalah total cost & Q jumlah output , maka biaya marjinalnya :

$$MC = c` = \frac{dC}{dQ}$$

Karena fungsi biaya total yang non linier pada umumnya berbentuk kubik , fungsi biaya marjinalnya akan berbentuk fungsi kuadrat .

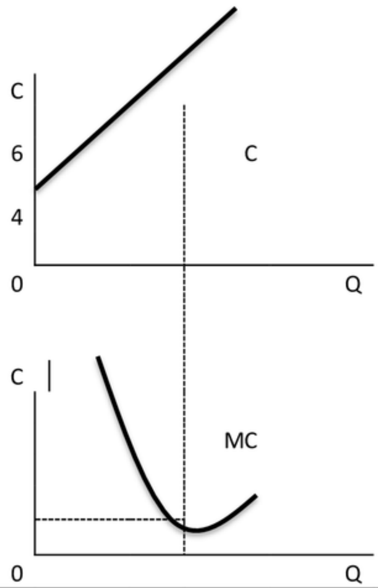
Contoh 1 :

$c = f(Q) = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$

$$Mc = c` = \frac{dC}{dQ} = 3Q^2 - 6Q + 4$$

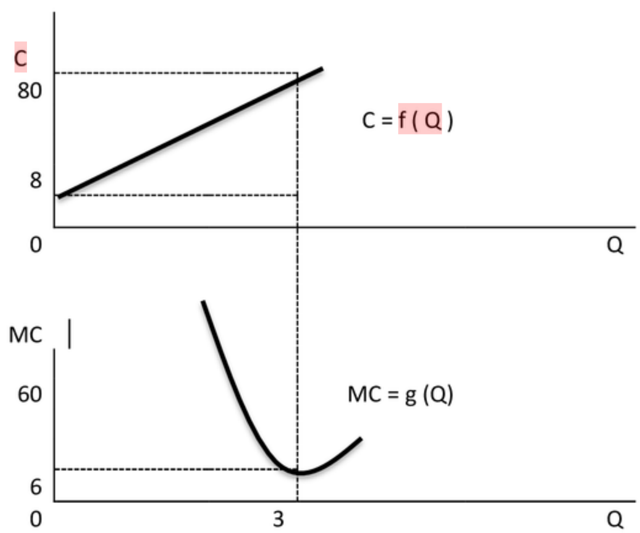
Kurva biaya marjinalnya (MC) selalu mencapai minimumnya tepatr pada saat kurva biaya total (C) berada pada posisi titik beloknya

Besarnya nilai minimum MC dapat dicari dengan membuat (MC) ` = 0 , yakni pada Q = 1 dengan memsubtitusikan hasil Q ini kedalam persamaan MC , diperoleh minimum MC = 1. Selanjutnya diperoleh titik belok kurva C pada posisi (Q = 1 , c = 6)



Contoh 2 :

$C = F(x) = 2\,Q^2 + 60\,Q + 3$ menunjukan fungsi biaya produksi total yang dikeluarkan sebuah firma. Tunjukan fungsi biaya marjinal & pada tingakat produksi berapa unit biaya marjinal minimum ? Berapa besar biaya marjinal & biaya total pada tingkat produksi tersebut ?



$C = 2\,Q^3 - 18\,Q^2 + 8$

$MC = C = dC/dQ = 6\,Q^2 - 36\,Q + 60$

Agar MC minimum, $(MC) = 0$

$(MC) = 12Q - 36 \longrightarrow 0 = 12\,Q - 36 \longrightarrow Q = 3$, pada $Q = 3$

$MC = 6\,(3) - 36\,(3) + 60$

$= 54 - 108 + 60 \longrightarrow MC = 6$

$C = 2\,(3) - 18\,(3) + 60\,(3) + 8$

$= 54 - 162 + 180 + 8 \longrightarrow c = 8$

Contoh 3 :

$AC = 0{,}5\ Q^2 - 15\ Q + 160 + 150/Q$ adalah persamaan dari biaya rata rata yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan . Hitunglah tinggi produksi yang memberikan biaya marjinal minimum dan besarnya biaya marjinal tersebut . Hitung juga besarnya biaya total dan biaya rata rata.

$C = AC.Q = (0{,}5\ Q^2 - 15\ Q + 160 + 150/Q)\ Q$

$= 0{,}5\ Q^2 - 15\ Q^2 + 160\ Q + 150$

$MC = C' = 1{,}5\ Q^2 - 30\ Q + 160$

MC minimum bila $(MC)' = 0 \longrightarrow 0 = 3\ Q - 3\ Q - 30 \dashrightarrow Q = 10$

MC minimum $= 1{,}5\ (10)^2 - 30\ (10) + 160 \dashrightarrow MC = 10$

$C = 0{,}5\ (10)^3 - 15\ (10)^2 - 30\ (10) + 160 \dashrightarrow C = 750$

$AC = 0{,}5\ (10)^2 - 15\ (10) + 160 + 150/10 \dashrightarrow AC = 75$

Contoh 4 :

$C = Q^3 - 90\ Q^2 + 250\ Q + 56500$ menunjukan persamaan biaya total yang dikeluarkan sebuah pabrik Bataco . pada tingkat produksi berapa unit tingkat biaya marjinal nya minimum ? Berapa besar nya biaya besar marjinal minimum dan berapa pula besar biaya total pada tingkat produksi tersebut ?

$C = Q^3 - 90\ Q^2 + 250\ Q + 56.500$

$MC = C' =$ - - $= 3\ Q^2 - 180\ Q + 250$

MC minimum bila $(MC)' = 0 \dashrightarrow (MC)' = 6\ Q - 180$

$6\ Q - 180 = 0 \longrightarrow Q = 30$, merupakan tingkat produksi dengan MC minimum

MC minimum $= 3\ (30)^2 - 180\ (30) + 250$

$= -2.450$

$C = 30^3 - 90\ (30)^2 + 250\ (30) + 56.500$

$= 10.000$

5. Penerimaan Marjinal

Penerimaan marjinal (marginal revenue , MR) ialah penerimaan tambahan yang diperoleh berkenaan adanya satu unit tambahan outout yang diproduksi atau terjual . Secara matematis, fungsi penerimaan marjinal adalah derevatif pertama dari fungsi penerimaan total.

Jika fungsi penerimaan total dinyatakan dengan R = f (Q) dimana R adalah total revenue dan Q melambangkan jumlah output , maka penerimaan marjinalnya :

$$MR = R' = \frac{dR}{dq}$$

4 Karena fungsi penerimaan total yang non- linier pada berbentuk fungsi kuadrat , fungsi penerimaan marjinal akan berbentuk fungsi linier

Contoh 1=

4 Fungsi permintaan akan suatu barang : $p = 16 - 2Q$

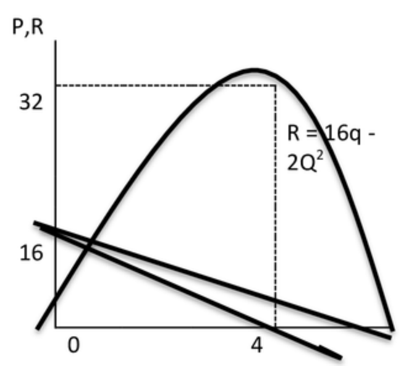
$R = f(Q) = P.\,Q$

$= (16 - 2Q).\,Q$

$= 16Q - 2Q^2$

$MR = R' = \quad = 16 - 4Q$

Kurva penerimaan marjinal (MR) selalu mencapai nol tepat pada saat kurva penerimaan total (R) berada pada posisi puncaknya .



Contoh 2 :

Hitunglah berapa unit barang harus dijual oleh seorang pedagang monopolish agar penerimaan totalnya maksimum, jika fungsi penerimaan yang dihadapi P = 1.600 – 2Q. Berapa penerimaan total maksimum tersebut dan harga jual barang nya per unit ?

R =P.Q. – 1,600.Q – 20 Q^2 MR = R ‘ = 1.600 – 40 Q

Agar R maksimum , MR = 0

1.600 – 40 Q = 0 ----> Q = 40

R = 1.600 (40) – 20 $(40)^2$ = 32.000

P = 1.600 – 20 $(40)^2$ – 8.000

Atau

P = R/Q = 32.000 / 40 = 800

Contoh 3 :

Berapa sebaiknya harga jual barang per unit ditetapkan jika permintaan yang dihadapi adalah Q = 8.000- 4 P ? Berapa unit barang nya terjual ?

Harga jual terbaik adalah harga jual yang menghasilkan penerimaan total maksimum .

Q = 8.000 – 4 P ⟶ P =2.000 – 0,25 Q

R = P.Q = 2.000 Q – 0,25 Q^2 ⟶ MR = R ‘= 2.000 – 0,50 Q

R maksimum bila MR = 0

2.000 – 0,50 Q = 0 ⟶ Q = 4.000

P = 2.000 – 0,25 – 0,25 (4.000)

= 1000

Jadi harga jual terbaik adalah 1.000 per unit dan jumlah barang yang terjual adalah 4.000 unit, dengan penerimaan total (maksimum) = 1.000 x 4.000= 4 juta

6. Produk Marjinal

Produk marjinal (marginal product) ialah output tambahan yang dihasilkan dari adanya penggunaan satu unit tambahan input secara matematis, fungsi produk marjinal adalah deveratif pertama dari fungsi produk total .Jika fungsi produk total dinyatakan dengan adalah deveratif pertama dari fungsi produk total .Jika fungsi produk total dinyatakan dengan P =f (X) dimana P dalah total produk dan X melambang kan jumlah input, maka produk marjianal nya :

$$MP = P' = Dp/dX$$

Karena fungsi produk total yang non linier pada umumnya berbentuk fungsi kubik ,fungsi produk marjinalnya akan berbentuk fungsi kuadrat . Analog dengan kasus fungsi niaya, kurva produk marjinal selalu mencapai nilai maksimum tepat pada saat kurva produk total berada pada posisi titik beloknya.

Contoh 1 :

$P = f(X) = 9x^2 - X^3$

$MP = P' = dP/dX = 18x - 3x^2$

Titik maksimum P adalah pada saat $p' = MP = 0$ Ber

arti $18x - 3x^2 = 0$ diperoleh $x = 6$

Pada $X = 6$ -----> $P = 108$

Titik belok , MP dantitik maksimum MP adalah pada saat p " = (MP) ,= 0

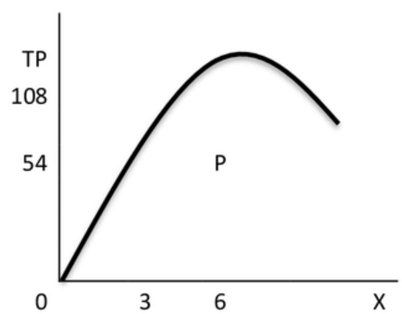
$P'' = (MP)' = 0$

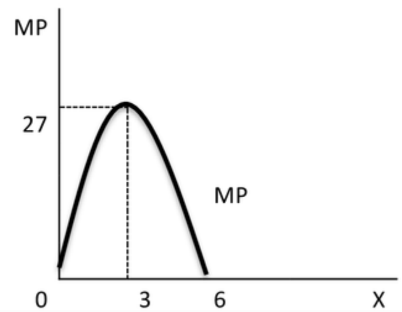
$(MP)' = 18 - 6x$

$0 = 18x - 6x$, diperoleh $x = 3$. pada $x = 3$

$P = 9(3)^{2-} (3)^3$ Sedangkan $MP = 18(3) - 3(3)$

$= 27$





Contoh 2 :

Jika fungsi produksinya adalah $P = 30\ X^{2} - 2\ X^{3}$, Pada tingkat penggunaan input berapa unit jumlah output yang dapat dihasilkan oleh seoarang produsen akan maksimum ? (P : output , X : input) . Berapa jumlah outputnya ?

$P = 30\ X^2 - 2\ X^2$ $MP = P'\ 60\ X - 6x^2$

P maksimum bila MP = 0

$\underline{60\ x - 6x^2 = 0}$: 6 x

$10 - X = 0$ -------> $X = 10$, $P = 30\ (10)^{2} - 2\ (10)^3$

$= 1.000$

Jadi jumlah output maksimum sebanyak 1.000 unit akan di hasilkan jika digunakan input sebanyak 10 unit

7. **Ulilitas Marjinal**

Ulilitas marjinal (marginal utility , MU) ialah utilitas tambahan yang diperoleh konsumen berkenaan adanya satu unit tambahan output yang dikonsumsi kan . secara matematis , fugsi utilitas marjinal adalah derivative pertama dari fungsi utilitas total .

Jika fungsi utilitas total dinyatakan dengan U = f (Q) diman U adalah total ultility dan Q melambangkan jumlah barang yang dikonsumsikan , maka utilitas marjinalnya :

$$\boxed{MU = U' = \frac{dU}{dQ}}$$

4

Karena fungsi utilitas total yang non linier pada umumnya berbentuk fungsi kuadrat , maka fungsi utilitas marjinalnya akan berbentuk fungsi linier . Analog dengan mencapai nol tepat pada saat kurva utillitas – total berada pada posisi puncaknya

Contoh 1 :

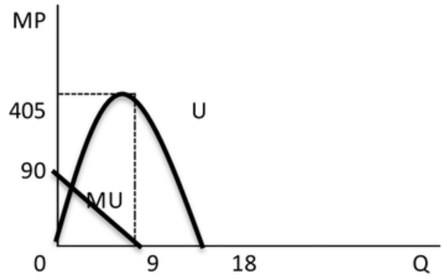
$U = f(Q) = 90\,Q - 5\,Q^2$

$MU = U' = dU / dQ = 90 - 10\,Q$

Titik maksimum U adalah pada saat U' = MU = 0. Berarti

$90 - 10\,Q =$ -----> $Q = 9$. Pada $Q = 9$, $U = 90\,(9) - 5\,(81)$

$U = 810 - 405$ -----> 405



Contoh 2 :

Jika $U = 32\,Q - Q^2$ mencermikan fungsi utilitas total seorang pencandu rokok , maka berapa batang rokok harus diisapnya sehingga memperolrh kepuasaan maksimum ?

\

$U = 32\,Q - Q^2$ $\qquad$ $MU = U' = 32 - 2\,Q$

U maksimum Bila MU = 0 -------> $32 - Q = 0$ -----> $Q = 16$

8. Keuntungan Maksimum

Tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum dapat dicari dengan pendekatan diferensial karena baik penerimaan total maupun biaya total sama sama merupakan fungsi dari jumlah output yang dihasilkan dari sini dapat dibentuk suatu fungsi baru yaitu fungsi keuntungan . Nilai ektrim dari fungsi keuntungan ini (Keuntungan Maksimum) dicari dengan menyamakan derivative pertamanya sama denga nol.

$R = r\,(Q)$ $\quad$ $\}\ \pi = R - C = f\,(Q)$

$C = c\,(C)$ $\quad$ $\{\ \pi$ akan maksimum jika $\pi' = f'\,(Q) = \dfrac{d\pi}{dQ} = 0$

$\pi = R - C$ $\qquad$ $\}$ jika $\pi = 0$, $MR - MC - O$

$\pi' = R' - C' = MR - MC\ \}$ $\qquad$ $MR - MC$

Kesamaan MR = MC ($\pi' = 0$) secara grafis ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva penrimaan marjinal (MR) dan kurva biaya marjinal (MC) . Hal ini sekaligus mencermikan jarak terlebar antara kurva penerimaan total dan kurva biaya total . Tetapi syarat MR = MC atau $\pi' = 0$ belum cukup untuk mencerminkan keuntungan maksimum, sebab jarak terlebar yang dicerminkan mungkin selesih positif (keuntungan) mungkin pula merupakan selisih negative (kerugian) . Untuk mengatuhi apakah $\pi' = 0$ mencerminkan keuntungan atau kerugian maksimum , perlu diuji dengan deratif kedua dari fungsi keuntungan .

$\pi = R - C = f(Q)$

π extrim : $\pi' = 0$

$\pi'' < 0$ -------> π maksium ------> keuntungan maksimum

$\pi'' > 0$ -------> π minimum ------> kerugian maksimum

Pada gambar diatas terlihat ada dua keadaan dimana $\pi' = 0$ (MR = MC) , yakni pada tingkat produksi Q1 dan Q3 . pada tingkat produksi Q1 , jarak terlebar antara kurva penerimaan total (R) dan kurva biaya total (C) mencermikan selisih negative terbesar . hal ini berarti terjadi kerugian maksimum , sebagaimana tercermin oleh kurva π yang mencapai minimumnya di titik G . sedangkan pada tingkat produksi Q3 , jarak terlebar antara kurva R dan kurva C mencerminkan selisih positif terbesar . Hal ini berarti terjadi keuntungan maksimum , sebagaimana tercermin oleh kurva π yang mencapai maksimum nya di titik C .

Dengan demikian syarat agar diperoleh keuntungan maksimum adalah :

$\Pi' = 0$	atau MR = MC
$\Pi'' = < 0$	atau (MR) ‘ < (MC) ‘

Syarat pertama disebut syarat yang diperlukan (necessary condition), sedangkan syarat kedua disebut syarat yang mencukupkan (sufficient condition)

Contoh 1 :

$R = r(Q) = -2Q^2 + 1.000Q$

$C = c(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$

Maka

$\Pi = R - C = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$

Agar keuntungan maksimum , $\pi' = 0$

$-3Q^2 + 114Q - 315 = 0$

$-Q^2 + 38Q - 105 = 0$

$(-Q + 3)(Q - 35) = 0$ diperoleh Q1 = 3 dan Q2 = 35 $\pi = -6Q + 114$

Jika $Q = 3$, $\pi' = -6(3) + 114 = 96 > 0$

Jika $Q = 35$, $\pi' = -6(35) + 114 = -96 < 0$

Karena $\pi' < 0$ untuk Q = 35 tingkat produksi yng menghasilkan keuntungan maksimum adalah Q = 35 unit. Adapun besarnya keuntungan maksimum tersebut :

$\Pi = -(35)^3 + 57(35)^2 - 315(35) - 2000 = 13.925$

Contoh 2 :

Seorang produsen menghadapi fungsi permintaan P = 100- 4Q dan biaya totalnya C = 50 + 20 Q . Hitunglah tingkat produksi yang mnghasilkan keuntungan maksimum , keuntungan maksimum dan haga jual barang per unit.

$R = p.Q = 100\,Q - 4\,Q^2$ ------> $MR = R' = 100 - 8\,Q$

$C = 50 + 20\,Q$ -----> $MC = C' = 20$

$\Pi = R - C$

$= 100\,Q - 4\,Q^2 - 50 - 20\,Q$

$= -4\,Q^2 + 80\,Q - 50$

Agar π maksimum $\pi' = 0$

$\Pi' = -8\,Q - 80$

$0 = -8\,Q - 80$ -----> $Q = 10$

Atau agar π maksimum MR = MC

$100 - 8\,Q = 20$ -------> $Q = 10$

$\Pi = -4\,(10) + 80\,(10) - 50 = 350$

$P = 100 - 4\,(10)$ --------> $P = 60$

jadi

$Q = 10$

π maks = 350

$P = 60$

Contoh 3 :

Fungsi biaya total variable $VC - 1{,}5\,Q^2 - 30\,Q$ adalah cermin gerak seorang produsen di pasar persaingan sempurna yang menjual barangnya seharga 90 per unit & biaya tetap total yang di keluarkan nya sebesar 400.

Berapa unit barang harus dihasilkan agar keuntungannya maksimum ? Hitung keuntungan maksimumnya !

$R = p.Q = 90\,Q$ -----> $MR = R' = 90$

$C = VC + FC = 1{,}5^2 - 30\,Q + 400$ -----> $C' = 3\,Q - 30$

Agar π maksimum MR = MC

$90 = 3\,Q - 30$ ----> $120 = 3\,Q$ -----------> $Q = 40$

$R = 90\,(40)$ -----> $R = 3600$

$C = 1{,}5\,(40) - 30\,(40) + 400$

$= 1600$

$\pi = R - C$

$= 2.000$

Contoh 4 :

$AC = 2\,Q^2 - 200\,Q + 3000 + 6000/Q$ adalah pencerminaan biaya rata rata seorang produsen . Barang yang akan terjual sebanyak 6 unit jika ia menjualnya seharga 300/ unit . Dan harga jual turun menjadi 100, akan terjual sebanyak 10 unit . Hitung tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum dan hitung besarnya keuntungan maksimum

$AC = 2Q^2 - 200Q + 3.000 + 6.000/Q$

$C = AC$

$= 2Q^3 - 200Q^2 + 3.000Q + 6.000$

$MC = C' = 6Q^2 - 4.000Q + 3.000$

Gejala permintaan:

$P1 = 100 \quad Q1 = 10$

$P2 = 300 \quad Q2 = 6$

fungsi permintaan:

$$\frac{P - P1}{P2 - P1} = \frac{Q - Q1}{Q2 - Q1}$$

$$\frac{P - 100}{300 - 100} = \frac{Q - 10}{6 - 10} \rightarrow (P - 100)(-4) = (Q - 10)(200)$$

Diperoleh $P = -50Q + 600$

$R = P.Q. = -50Q^2 + 600Q$

$MR = R \quad = -100Q + 600$

$\Pi = R - C$

$= -50Q^2 + 600Q - (2Q^3 - 200Q^2 + 3.000Q + 6.000)$

$= -50Q^2 = 600Q - 2Q^3 + 200Q^2 - 3.000Q - 6.000$

$= -2Q^3 + 150Q^2 - 2.400Q - 6.000$

Π akan maksimum bila :

(1) $\Pi' = 0$ syarat yang di perlukan (MR = MC)
(2) $\Pi'' < 0$ syarat yang mencukupkan (MR' < MC')

$\Pi' = -6Q^2 + 300Q - 2.400$

$\Pi'' = -12Q + 300$

(1) $-6Q^2 + 300q - 2.400 = 0$
------------------------------------ : -6
$Q^2 - 50Q + 400 = 0$, diperoleh Q1 = 10 & Q2 = 40
(2) $Q = 10 \rightarrow \pi'' = -12(10) + 300 = 180 > 0$
$Q = 40 \rightarrow \pi'' = -12(40) + 300 = -180 < 0$

Q = 40 memenuhi syarat yang mencukupkan (sufficient, condition, bahwa $\pi'' < 0$), berarti keuntungan maksimum akan diperoleh bila terjual barang 40 unit. Adapun besarnya keuntungan maksimum tersebut:

$$
\begin{aligned}
\Pi &= -2\,Q^3 + 150\,Q^2 - 2.400\,Q - 6.000 \\
&= -2\,(40)^3 + 150\,(40)^2 - 2.400\,(40) - 6.000 \\
&= -128.000 + 240.000 - 96.000 - 6.000 \\
&= 10.000
\end{aligned}
$$

9. Hubungan Biaya Marjinal dengan Biaya Rata - Rata

Dalam ekonomi mikro diperoleh suatu penemuan, bahwa pada saat biaya rata-rata mencapai nilai minimumnya maka biaya marjinal sama dengan biaya rata-rata. Secara gratis hal ini ditunjukan oleh perpotongan kurva biaya marjinal dengan kurva biaya rata-rata pada posisi minimum kurva biaya rata-rata. Secara matematis penemuan tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut:

Andaikan biaya total dinyatakan dengan C = f (Q), maka

Biaya marjinal : $MC = C' = \frac{dC}{dQ}$

Biaya rata – rata : $AC = \frac{C}{Q}$

Syarat yang diperlukan agar AC minimum ialah bahwa derivatif pertama dari AC sama dengan nol.

Menurut kaidah diferensiasi, jika

$$y = \frac{u}{v} \quad \text{maka } y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$AC = \frac{C}{Q} \text{ maka } (AC)' = \frac{QC' - Q'C}{Q^2} = \frac{QC' - C}{Q^2}$$

(sebab jika Q – Q' , Q' – 1)

Sarat agar AC minimum:

$$(AC)' = O \rightarrow \frac{C'Q - C}{Q^2} = O$$

$$C'Q - C = 0 \quad \rightarrow C' = C / Q$$

Padahal C' adalah juga MC. Dengan demikian terbukti bahwa pada posisi minimum AC:

$MC = AC$, $\frac{dC}{dQ} = \frac{C}{Q}$

Contoh 1:

Biaya total : C = Q3 – 6 Q2 + 15 Q

Maka,

$$\text{Biaya Marjinal : } MC = C' = \frac{dC}{dQ} = 3\,Q2 - 12\,Q + 15$$

$$\text{Biaya rata-rata : } AC = \frac{C}{Q} = Q2 - 6\,Q + 15$$

$$(AC)' = \frac{d\ \ AC}{d\ \ Q} = 2\,Q - 6$$

Agar AC minimum, (AC)' = 0

AC = (3) - 6 (3) + 15 = 6

2 Q – 6 = 0, Q = 3

Pada Q = 3

$MC = 3\,(3)^2 - 12\,(3) + 15 = 6$

$AC = (3)^2 - 6\,(3) + 15 = 6$

Contoh 2:

Buktikan fungsi biaya total $C = 1/2\ C^3 - 20\ Q^2 + 25\ Q$ mempunyai biaya rata-rata minimum sama dengan biaya marjinalnya!

$C = 1/2\ Q^3 - 20^2 + 25\ Q$

$AC = C/Q = 1/2\ Q^2 - 20\ Q + 25$

$MC = dC/dQ = 3/2\ Q^2 - 40\ Q + 25$

AC minimum bila (AC)' = 0

(AC)' = Q – 20 = 0 → Q = 20

$AC = 1/2\ (20)^2 - 20\ (20) + 25 = -175$, terbukti

$MC = 3/2\ (20)^2 - 40\ (20) + 25 = -175$

10. Hubungan Produk Marjinal dengan Produk Rata – Rata

Analog dengan hubungan antara biaya marjinal dan biaya rata- rata, pada saat produk rata – rata mencapai nilai ekstrimnya (dealam hal ini nilai maksimum) maka produk marjinal sama dengan produk rata-rata.

Andaikan produk total dinyatakan dengan P = f (X), dimana P melambangkan jumlah input yang digunakan, maka:

Produk marjinal : $MP = P' = dP / dX$

Produk rata-rata : $AP = P / X$

$$(AP)' = 0 \dashrightarrow \frac{P'X - X'P}{X^2} = \frac{P'X - P}{X^2}$$

(sebab jika X = X, X' = 1)

Syarat yang diperlukan agar AP maksimum ialah (AP)' = 0, dan syarat yang mencukupkan (AP)" < 0

$$(AP)' = 0 \rightarrow \frac{P'X - P}{X2} =$$

$$P'X - P = 0, \rightarrow P' = P / X$$

Padahal P' adalah juga MP. Dengan demikian terbukti bahwa pada posisi maksimum MP:

$$MP = AP, \frac{dP}{dX} = \frac{P}{X}$$

Contoh 1:

Produk total : $P = 9X^2 - X^3$ maka :

Produk marjinal : $MP = P' = \frac{dp}{dX} - 18X - 3X^2$

Produk rata-rata : $AP = \frac{P}{X} = 9X - X^2$

$$(AP)' = \frac{d\,AP}{d\,X} = 9 - 2X$$

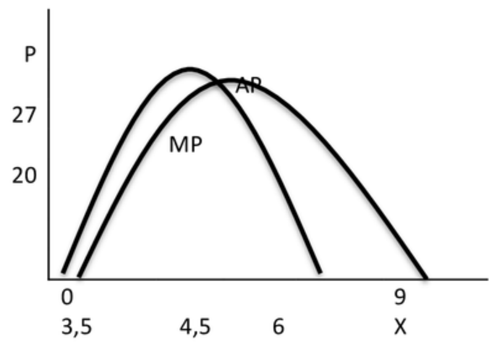
Agar AP maksimum, (AP)' = 0

9-2X = 0, X = 4 , 5

Pada X = 4 , 5

MP = 18 (4 , 5) – 3 (4 , 5)^2 = 20 , 25

AP = 9 (4 , 5) – (4 ,5)^2 = 20 , 25



Contoh 2 :

Fungsi produksi total P = 48 X^2 - 1/3 X^3. Buktikan bahwa produk rata-ratanya sama dengan produk marjinalnya.

P = 48 X^2 – 1/3 X^3 ---> AP = 48 X – 1/3 X^2

MP = 96 X – X^2

AP maksimum bila (AP)' = 0

(AP)' = 48 – 2/3 X = 0 ---> X = 72

AP = 48 (72) – 1/3 (72)^2 ---> AP = 1728

MP = 96 (72) – (72)^2 ---> MP = 1728

Soal Latihan :

1. Pola permintaan akan suatu barang dicerminkan oleh fungsi $D = 400 - 2P^2$
   Jelaskan bagaimana sifat permintaan akan barang tersebut elastis, inelastis ataukah unitary elastis pada tingkat harga :
   a. $P = 5$
   b. $P = 10$
   c. $P = 15$
   d. $D = 224$ unit
   e. $D = 448$ unit

2. Diketahui fungsi penawaran suatu barang sebagai berikut :
   $S = -200 + 12\ P^2$
   Hitunglah elastisitas penawaran barang tersebut pada tingkat harga :
   a. $P = 10$
   b. $P = 15$
   c. $S = 193$ unit
   d. $S = 286$ unit
3. Fungsi produksi suatu barang dinyatakan dengan persamaan $P = 3X^2 - 2X^3$, P melambangkan produk atau output dan X melambangkan input.
   Hitunglah elastisitas produksi nya pada tingkat penggunaan input :
   a. Sebanyak 4 unit
   b. Sebanyak 8 unit
   c. Sebanyak 10 unit
   d. Sebanyak 12 unit
4. Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah pabrik dicerminkan oleh persamaan :
   $C = 2Q^3 - 90Q^2 + 250Q + 30000$
   a. Pada tingkat produksi berapa unit biaya marjinal minimum
   b. Berapa besarnya biaya marjinal minimum tersebut?
   c. Berapa besarnya biaya total pada tingkat produksi tersebut?
5. Biaya produksi total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan dicerminkan oleh persamaan : $C = 4Q^3 - 18Q^2 + 10Q + 10$
   a. Tunjukkan fungsi biaya marjinal nya?
   b. Pada tingkat produksi berapa unit biaya marjinal nya minimum
   c. Berapa besarnya biaya marjinal?
   d. Berapa besarnya biaya total pada tingkat produksi tersebut
6. Biaya rata-rata yang dikeluarkan oleh suatu perusahaan ditunjukkan oleh :
   $Ac = Q^2 - 30Q + 320 + 300/Q$
   a. Bagaimana fungsi biaya totalnya?
   b. Bagaimana fungsi biaya marjinalnya?
   c. Berapa tingkat produksi yang memberikan biaya marjinal minimum?
   d. Berapa besarnya biaya marjinal tersebut?
   e. Berapa besarnya biaya total pada tingkat produksi tersebut?
7. Fungsi permintaan yang dihadapi oleh monopolist $P = 800 - 10Q$
   a. Berapa unit yag harus dijual agar permintaan total maksimum?
   b. Berapa besarnya penerimaan total maksimum tersebut?

c. Berapa harga jualnya?

8. Diketahui fungsi permintaan suatu barang sebagai berikut :
   $Q = 4000 - 2P$
   a. Berapa unit barang yang harus terjual agar penerimaan maksimum
   b. Berapa besarnya penerimaan total maksimum tersebut?
   c. Berapa harga jualnya?
9. Diketahui fungsi produksi $P = 60X^2 - 4X^3$
   a. Pada tingkat penggunaan input berapa unit jumlah output yang dihasilkan akan maksimum?
   b. Berapa jumlah output maksimum tersebut?
10. Diketahui fungsi utilitas yang dihadapi oleh seorang perokok adalah $U = 64\,Q - 2Q^2$
   a. Bagaimana fungsi marjinal utilitynya?
   b. Berapa batang rokok harus dihisap oleh seorang perokok agar kepuasan maksimum?
11. Seorang produsen menghadapi fungsi permintaan $P = 200 - 8Q$ dan biaya totalnya $C = 100 + 40Q$
   a. Bagaimana fungsi permintaannya?
   b. Hitunglah tingkat produksi yang mengahasilkan keuntungan maksimum?
   c. Berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut?
   d. Berapa harga jual barang perunit?
12. Seorang produsen menjual barangnya 180/unit. Biaya tetap total yang dikeluarkan sebesar 800, sedangkan biaya variabel totalnya $VC = 3\,Q^2 - 60\,Q$
   a. Bagaimana fungsi penerimaannya?
   b. Berapa yang harus dijual agar keuntungan maksimum?
   c. Berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut?
13. Diketahui : $AC = 4Q^2 - 400Q + 6000 + 12000/Q$
   $R = -100Q^2 + 1200Q$
   a. Berapa unit barang yang harus terjual agar keuntungan maksimum?
   b. Berapa besarnya keuntungan maksimum tesebut?
   c. Berapa harga jualnya?
14. Diketahui fungsi biaya total $C = 0{,}5Q^3 - 20Q^2 + 25Q$
   Buktikan bahwa untuk fungsi biaya tersebut biaya rata-rata minimum sama dengan marjinal?
15. Diketahui fungsi produksi $P = 48X^2 - 1/3X^3$
   Buktikan bahwa untuk fungsi produksi tersebut produk rata-rata maksimum sama dengan produk marjinal?
16. Diketahui : $R = -4Q^2 + 2000Q$
   $€ = 2Q^3 - 118Q^2 + 2630Q + 4000$
   a. Berapa unit barang yang harus dijual agar keuntungan maksimum?
   b. Berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut?
   c. Berapa harga jualnya?
17. Diketahui fungsi biaya total $C = 2Q^3 - 12Q + 30$
   Buktikan bahwa biaya rata-rata minimum sama dengan biaya marjinal?
18. Diketahui fungsi produksi $P = 18X^2 - 2X^3$
   Buktikan bahwa produk rata-rata maksimum sama dengan produk marjinal

BAB V

INTEGRAL

10

Pendekatan integral taktentu dapat diterapkan untuk mencari persamaan fungsi dari sesuatu . Variabel ekonomi apabila persamaan fungsi marjinal diketahui. karena fungsi marjinal pada dasarnya merupakan turunan dari fungsi total , maka dengan proses sebaliknya – dapatlah dicari fungsi asal fungsi turunan tersebut atau fungsi totalnya .

Fungsi Biaya

Biaya total : c = f ‘ (Q)
Biaya marjinal : mc = c ‘ = dC/dQ = f ‘ (Q)
biaya total tak lain adalah integral dari biaya marjinal .

$$C = \int MC\, dQ = \int f'(Q)$$

Contoh 1:

MC = $3Q^2 - 6Q + 4$ mencerminkan fungsi biaya marjinal dari suatu perusahaan . carilah persamaan biaya total dan biaya rata – ratanya.

Biaya total : $c = \int MC\ dQ$

$= \int (3Q^2 - 6Q + 4)\, dQ$

$= Q^3 - 3Q^2 + 4Q + K$

Biaya rata - ratanya : $AC = C/Q = Q^2 - 3Q = 4\ k/Q$

Konstanta k tak lain adalah biaya tetap . jika diketahui biaya tetap tersebut sebesar 4 maka:

$C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$

$AC = Q^2 - 3Q + 4 + 4/Q$

Fungsi Penerimaan

Penerimaan total : R = f ,(Q)

Penerimaan marjinal: MR = r‘= = f’ (Q)

Penerimaan total tak lain adalah integral dari peneriman marjinal , yaitu :

$$R = \int MR\ sQ = \int f'\ (Q)$$

Contoh 1 :

Carilah persamaan penerimaan total dan penerimaan rata –rata dari suatu perusahaan jika penerimaan marjinal mr 16 – 4 Q

Penerimaan total : $R = \int MR \, dQ$

$= \int (16 - 4) \, dQ$

$= 16 Q - 2 Q$

Penerimaan rata rata : $AR = R / Q = 16 - 2 Q$

Dalam persamaan penerimaan total kontanta k – 0 , sebab penerimaan tidak akan ada jika tak ada barang yang dihasilkan atau terjual .

Contoh 2 :

Carilah persamaan fungsi penerimaan total dan fungsi permintaan dari sebuah perusahaan yang penerimaan marjinal mr = 900 – 28Q

$R = \int mr \, . \, dQ$

$= \int (900 - 28 Q) \, dQ$

$= AR = R / Q = 900 - 14 Q^2$

3 .Fungsi Produksi

Produk total : P = f (x) dimana , P = output ; X = input

Produksi marjinal : $MP = P' = dP / dX = f'(X)$

Produk total adalah integral dari produk marjinal :

$$\boxed{P = \int MP \, dx = \int f'(X) \, dx}$$

Contoh :

$18\ x - 3^2$ adalah cermin persamaan produk marjinal dari sebuah perusahaan . carilah persamaan produk total serta produk rata – ratanya .

Produk total : $p = \int MP\ dX$

$= \int (18\ X - 3\ X^2)\ dX$

$= 9\ X^2 - X^3$

Produk rata – ratanya : $AP = P / X = 9\ X - X^2$

Dalam persamaan produk total juga konstanta k = 0, sebab tidak akan ada output (P) yang dihasilkan jika tidak ada input yang diolah atau digunakan .

4.Fungsi Utilitas

Utilitas total : $U = F(Q)$
Utilitas marjinal : $MU = U = D \backslash dU / dQ\ f'(Q)$
Utilitas total tak lain adalah itegral dari utilitas marjinal

$$U = \int MU\ DQ = \int F'\ (Q) DQ$$

Contoh :

Carilah persamaan utilitas total dari seorang konsumen jika utilitas marjinal $MU = 90 - 10\ Q$

Utilitas total : $U = \int MU\ DQ$

$= \int (90 - 10\ Q)\ dQ$

$= 90\ Q - 5\ Q^2$

Seperti halnya produk total dan permintaan total di sinipun konstanta k = 0 , sebab tidak akan ada keputasan atau utilitas yang diperoleh seseorang jika tak ada barang yg di konsumsi .

10

5 . Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

Dalam ekonomi makro , konsumsi (C) dan tabungan (S) dinyatakan fungsional terhadap pendapat nasional (Y)

$C = f(Y) = a + bY$
$MPC = C' = dC / dY = f'(Y)\ b$

Karena $Y = C + s$, maka

$S = G(Y) = -a + (1 - b)\ Y$
$Mps = s' = dS / dy = g'(Y) = (1 - b)$

Berdasarkan kaidah integrsai, konsumsi dan tabungan masing – masing adalah integral dari *marjinal propensity to consumen* dan *marjinal propensity to save* .

$$C = \int MPC\, dY - f(Y) + k \qquad k = a$$

$$S = \int MPS\, dY = G(Y) = k \qquad k = -a$$

Konstanta k pada fungsi konsumsi dan fungsi tabungan masing – masing adalah autonomous consumption dan autonomus saving .

Contoh :

Carilah fungsi konsumsi dan fungsi tabungan masyarakat sebuah negara jika diketahui autonomus consumption nya sebesar 20 milyar danMPC = 0,8

$$C = \int MPC = 0{,}8\, dY = \int 0{,}8\, Y + 30 \text{ milyar}$$

$$S = \int MPS = 0{,}2\, dY = \int 0{,}2\, Y - 30 \text{ milyar}$$

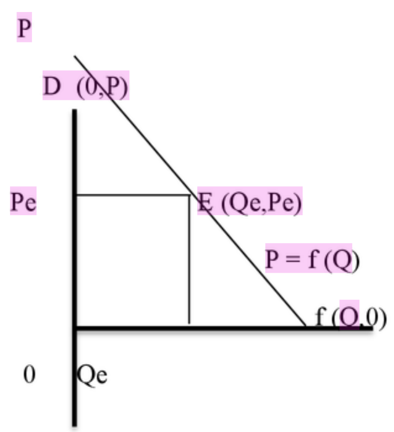
ATAU

$$S = y - C = Y - (0{,}8\, Y - 30 \text{ milyar}) = 0{,}2\, Y - 30 \text{ milyar}$$

Surplus Konsumen

Surplus konsumen (consumer's surplus) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat tingkatan harga pasar suatu barang .

Fungsi permintaan P = f (Q) menunjukan jumlah suatu barang . yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu . jika tingkat harga pasar Pe , maka bagi konsumen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari Pe, akan merupakan keuntungan baginya, sebab ia cukup membayar barang tadi dengan harga Pe. Keuntungan lebih semacam inilah yang oleh Alfared Marsha disebut surplus konsumen. secara geometri< besarnya surplus konsumen ditunjukan oleh luas area di bawah kurya permintaan tetapi diatas tingkat harga pasar .



Surplus konsumen atau CS (singkatan dari consumens surplus) tak lain adalah segitiga peDE , dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh Q = 0 sebagai batas – bawah dan Q = Qe sebagi atas .

Besarnya surplus konsumen adalah :

$CS = \int F\,(Q)\,dQ - QePe$

Dalam hal fungsi permintaan berbentuk P = f (P)

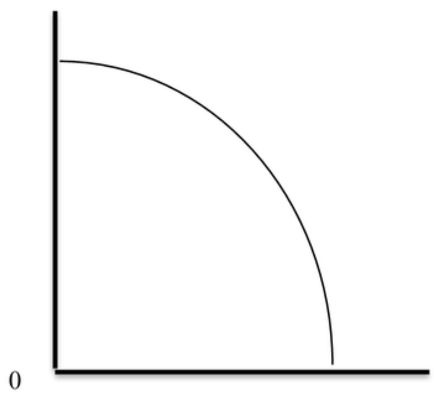
$CS = \int^{P}_{pe} f\,(Q)\,dP$

Dalam hal fungsi permintaan berbentukn Q = F (P); p adalah nilai p untuk q = 0, atau pengal kurya permintaan pada sumbu harga . dengan demikian :

$CS = \int_{O} f\,(Q)\,dQ - QePe - \int_{pe} f\,(P)\,dP$

Contoh :

Q = 48 – 0,03 P menunjukan fungsi permintaan suatu barang . hitunglah surplus konsumen jika tingkat harga pasar diketahuin = 30 !



$Q = 48 - 0{,}03\,P^2$

Jika P = o, q = 48

jika Q = 0 p = 40 p

jika p = pe = 30,

Q = Qe = 21

CS = f (P) dP = (48 -0,03 p^2) dP

$$= [\, 48\, P - 0{,}01\ P^3 \,]_{30}^{40}$$

$$= \{ 48\ (40) - 0{,}01\ (40)^3 \} - \{ 48\ (40) - 0\ {,}01\ (30) \}$$

$$= (1920 - 640) - (1440 - 270) \dashrightarrow Cs = 110$$

Contoh 2 :

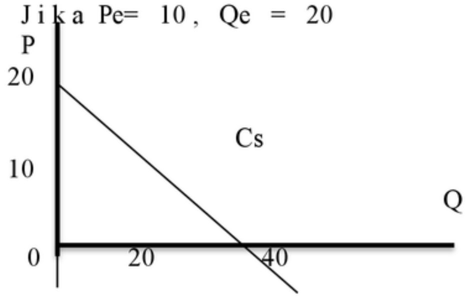
Hitunglah surplus konsumen dengan dua macam cara untuk fungsi permintaan Q = 40 - 2 p yang tingkat harga Pasarnya 10 .

$Q = 40 - 2P$ ----------> $P = 20 - 0{,}50\,Q$

Jika $P = 0$, $Q = 40$

Jika $Q = 0$, $P = 20 = P$.

Jika $Pe = 10$, $Qe = 20$



Cara Pertama :

$$Cs = \int_0^{Qe} f(Q)\ dQ - QePe = \int_0^{20} (20 - 0{,}50Q)\, dQ - 20{,}10$$

$$= [\, 20\ Q - 0{,}25\, Q^2 \,]_0^{20} - 200$$

$$= \{ 20\,(20) - 0{,}25\,(20)^2 \} - \{ 20\,(0) - 0{,}25\,(0)^2 \} - 200$$

$$= 400 - 100\ 200 \dashrightarrow Cs = 100$$

Cara Kedua :

$$Cs = \int_{Pe}^{P} f(P)\ dP = \int_{10}^{20} (40 - 2\,p)\ dP$$

$$= [\, 40\ P - P^2 \,]_{10}^{20}$$

$$= 40(20) - (20)^2 - 40(10) - (10)^2$$

$$= 400 - 300 \dashrightarrow Cs = 100$$

Contoh 3 :

Hitunglah keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu pada tingkat harga pasar setinggi 50, jika fungsi permintaanya Q = 60 – 0,50 P.

Q = 60 – 0,50 P ------> P = 120 – 2 Q

P= Pe = 50 ------> Qe = 60 - 0 , 50 (50) = 35

Surplus konsumen :

$$Cs = \int_{0}^{Qe} f(Q)\, dQ - QePe$$

$$= \int_{0}^{35} (120 - 2\,Q)\, dQ - (35)(50)$$

= [120 Q – Q] - 1.750

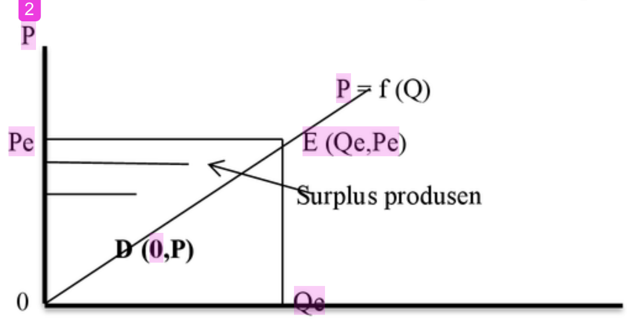
= { 120 (35) – 35 } – { 120(0) – 0 } – 1.750

= 4.200 – 1.225 – 1.750 -----> Cs = 1.125

7.. Surplus produsen

Surplus produsen (Producer's surplus) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh produsen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar dari barang yang di tawarkan .

Fungsi penawaran P = f(Q) menunjukan jumlah sesuatu barang yang akan di jual oleh produsen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah Pe, maka bagi produsen tertentu yang sebetulnya bersedia menjual dengan harga yang lebih rendah dari Pe hal ini akan merupakan keuntungan baginya sebab ia kini dapat menjual barangnya dengan harga Pe (lebih tinggi dari harga jual semula yang direncanakan. Keuntungan lebih semacam ini disebut surplus produsen . secara Geometri , besarnya surplus produsen ditunjukan oleh luas area di atas kurva penawaran tetapi di bawah tingkat harga pasar . .



Surplus Produsen atau Ps (singkatan dari Producers' surplus) tak lan adalah segitiga PeDE, dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh Q = 0 sebagai batas- bawah dan Q = Qe sebagai batas – atas.

Besarnya surplus produsen adalah :

$$Ps = QePe - f(Q) \int_{0}^{Qe} dQ$$

Dalam hal fungsi penawaran bentuk P = f(Q), atau

$$Pe = \int_{P}^{Pe} f(P)\, dP$$

Dalam hal fungsi penawaran berbentuk Q = f(P); P adalah nilai P untuk Q = 0, atau panggal kurva penawaran pada sumbu harga , dengan demikian :

$$\boxed{Ps = QePe - \int_{0}^{Qe} f(Q)\, dQ = \int_{P}^{Pe} f(P)\, dP}$$

Contoh 1 :

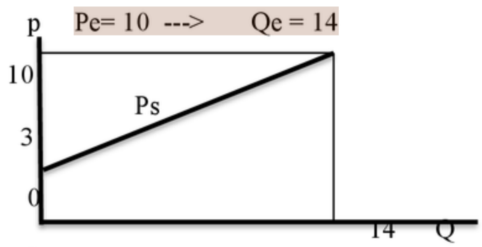
Fungsi penawaran seorang produsen --> P = 0,50 Q + 3 berapa surplus produsen itu bila tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 10 ? lakukan perhitungan dengan dua cara .

P = 0,50 Q + 3 -----> Q = - 6 + 2 P

P = 0 -----> Q = - 6

Q = 0 -----> P = 3 = P

Pe= 10 ---> Qe = 14



Cara Pertama :

$$Ps = QePe - \int_{0}^{Qe} f(Q)\, dQ = (14)(10) - \int_{0}^{14} (0,50Q + 3\, dQ)$$

$$= 140 - [\,0,25\, Q^{2} + 3\, Q\,]_{0}^{14}$$

$= 140 - \{0,25\,(14)^{2} + 3(4)] - \{0,25\,(0)^{2} + 3\,(0)$

= 140 – 91 – 0 ---> Ps = 49

Cara kedua :

$$Ps = \int_{P}^{Pe} f(P)\,dP = \int_{3}^{10} (-6 + 2P)\,dP$$

$= [\,-6P + P\,] = \{\,-6(10) + 10\,\} - \{-6(3) + 3\,)$

$= 40 - (-9) \text{ -----> } Ps = 49$

Contoh 2 :

Penawaran dan permintaan akan suatu barang di pasar masing – masing ditunjukan oleh $Q = -30 + 5P$ dan $Q = 60 - 4P$

Hitunglah masing – masing surplus yang diperoleh kon- sumen dan produsen

Penawaran :

$Q = -30 + 5P$

$P = 6 + 0{,}20\,Q$

Permintaan :

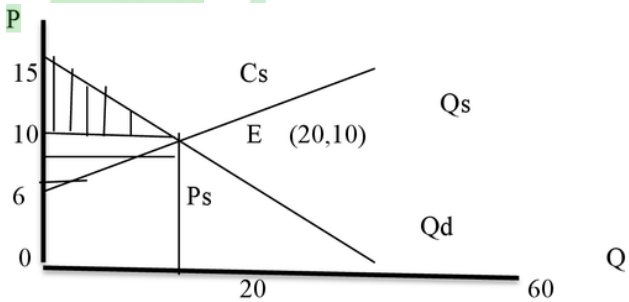
$Q = 60 - 4P$

$P = 15 - 0{,}25\,Q$

Keseimbangan pasar :

$Qs = Qd$

$-30 + 5P = 60 - 4P$



$9P = 90$

$P = 10 = Pe$

$Q = 60 - 4P = 60 - 4(10) = 20 = Qe$

Surplus Konsumen :

$$Cs = \int_{0}^{Qe} f(Q)\,dQ - QePe$$

$$= \int_{0}^{20} [15 - 0{,}125\,Q] - 200$$

$$= [\,15Q - 0{,}125\,Q^{2}\,]_{0}^{20} - 200$$

$= 250 - 200 \text{ ---> } Qs = 500$

Surplus Produsen :

$$Ps = QePe - \int_0^{Qe} f(Q)\, dQ$$

$$= (20)(10) - \int_0^{Qe} (6 + 0,20\ 0)\, dQ$$

$$= 200 - [\,6Q + 0,10\,Q^2\,]_0^{20}$$

$$= 200 - 160 \dashrightarrow Ps = 40$$

Contoh 3 :

Fungsi penawaran suatu barang dari seorang produsen adalah Q = - 45 + 3 P. Berapa keuntungan atau surplus yang dinikmatinya jika haraga pasar adalah 25 ?

Q = - 45 + 3 P -----> P = 15 + 1/3 Q
P = Pe = 25 -----> Qe = - 45 + 3 (25) = 30

Surplus produsen :

$$Pe = QePe - \int_0^{Qe} f(Q)\, dQ$$

$$= (30)(25) - \int_0^{30} (15 + 1/3\,Q)\, dQ$$

$$= 750 - [15\,Q + 1/6\,Q^2\,]_0^{30}$$

$$= 750 - \{15(0) + 1/6(30)^2) - \{15(0) + 1/6(0)^2)$$

$$= 750 - 450 - 150 = 150$$

Contoh 4 :

6

Hitunglah besarnya surplus yang dinikmati oleh masing – masing produsen dan konsumen , apabila fungsi penawaranya adalah P = 100 + 2Q dan fungsi permintaanya P = 100 – 2/3 Q .

Penawaran :
P = 100 + 2Q
Q = 0,50 P – 50

Keseimbangan pasar :
Qs = Qd
0,50 P – 50 = 150 – 1,50 P
2p = 200
P = 100 --> Pe = 100

Permintaan :
P = 100 – 2/3 Q
Q = 150 – 1,50 P

Qe = 0,50 (100) – 50 = 150 – 1,5 (100) = 0

Karena Qe = 0 berarti tidak ada barang yang terjual atau dibeli,
dengan demikian tidak ada surplus yang dinikmati baik oleh produsen maupun konsumen. Jadi
Ps = Cs = 0

Contoh 5 :

Jika fungsi permintaan akan suatu barang diketahui
$Q = 60 - 0,5\ P$ sedangkan fungsi penawarannya adalah
$Q = -45 + 3\ P$, berapa besarnya surplus yang
Dinikmati oleh masing-masing produsen dan konsumen ?

Permintaan :
$Q = 60 - 0,50\ P$
$P = 120\ 2\ Q$

Penawaran :
$Q = -45 + 3\ P$
$P = 15 + 1/3\ Q$

Keseimbangan Pasar :

$$Qd = Qs$$
$$60 - 0,50\ P = -45 + 3\ P$$
$$105 = 3,50\ P \dashrightarrow Pe = 30$$
$$Qe = 60 - 0,50\ (30) = -45 + 3\ (30) = 45$$

Surplus Konsumen

$$\begin{aligned} Cs &= \int_0^{Qe} f(Q)\, dQ - QePe \\ &= \int_0^{45} (120 - 2\ Q)\, dQ - (45)(30) \\ &= [\ 120\ Q - Q^2\ ]^{45} - 1350 \\ &= 5400 - 2025 - 1350 \dashrightarrow Cs = 2025 \end{aligned}$$

Surplus Produsen :

$$\begin{aligned} Ps &= QePe - \int_0^{Qe} f(Q)\, dQ \\ &= (45)(30) - \int_0^{45} (15 + 1/3\ Q)\, dQ \\ &= 1.350 - [\ 15\ Q + 1/6\ Q^2\ ]^{45} \\ &= 1.350 - \{15(45) + 1/6(45)^2\} - \{15(0) - 1/6(0)^2\} \\ &= 1.350.675 - 337,75 = 337,5 \end{aligned}$$

Soal Latihan :

1. Diketahui : $MC = 3Q^2 - 8Q + 24$. Biaya tetap total = 40
   a. Bagaimana fungsi biaya totalnya ?
   b. Bagaimana fungsi biaya rata-rata nya ?

2. Diketahui : $MR = 1.800 - 54\,Q$
   a. Bagaimana fungsi penerimaan totalnya ?
   b. Bagaimana fungsi permintaan nya ?

3. Diketahui : Fungsi permintaan $Q = 120 - P$
   Harga keseimbangan = 100
   Hitunglah surplus yang dinikmati oleh konsumen ?

4. Diketahui : Fungsi Penawaran $Q = -90 + 6P$
   Harga keseimbangan = 50
   Hitunglah surplus yang dinikmati oleh produsen ?

5. Diketahui : Fungsi permintaan $Q = 120 - P$
   Fungsi penawaran $Q = -90 + 6P$
   a. Hitunglah harga kuantitas keseimbangan di pasar ?
   b. Hitunglah surplus yang dinikmati konsumen ?
   c. Hitunglah surplus yang dinikmati produsen ?

6. Diketahui : Fungsi permintaan $P = -10\,Q + 150$
   Fungsi penawaran $P\ 5Q + 30$
   a. Hitunglah harga kuantitas dan harga keseimbangan di pasar ?
   b. Hitunglah surplus yang dinikmati konsumen ?
   c. Hitunglah surplus yang dinikmati produsen ?

7. Diketahui : Fungsi permintaan $Q = 40 - 6P$
   Fungsi penawaran $Q = -8 + 4P$
   a. Hitunglah harga kuantitas dan harga keseimbangan di pasar ?
   b. Hitunglah surplus yang dinikmati konsumen ?
   c. Hitunglah surplus yang dinikmati produsen ?

8. Diketahui : Fungsi permintaan $Q = 17 - P$
   Fungsi penawaran $Q = -8 + 4P$
   a. Hitunglah harga kuantitas dan harga keseimbangan di pasar ?
   b. Hitunglah surplus yang dinikmati konsumen ?
   c. Hitunglah surplus yang dinikmati produsen ?

9. Diketahui : Fungsi permintaan $Q = 11 - P$
   Fungsi penawaran $Q = -\$ + 2P$
   a. Hitunglah harga kuantitas dan harga keseimbangan di pasar ?
   b. Hitunglah surplus yang dinikmati konsumen ?
   c. Hitunglah surplus yang dinikmati produsen ?

BAB VI
PROGRAMASI LINEAR

1. Pengertian

Programasi linear ialah suatu model optimasi persamaan linear perkenaan dengan kendala-kendala pertidaksamaan linear yang dihadapinya. Masalah programasi linear adalah masalah pencarian nilai-nilai optimum sebuah fungsi linear pada suatu sistem pertidaksamaan linear . Fungsi linear yang hendak dicaari nilai optimumnya disebut fungsi obyektif, sedangkan pertidaksamaan-pertidaksamaan linear yang harus terpenuhi dalam optimasi fungsi obyektif tadi disebut fungsi kendala.

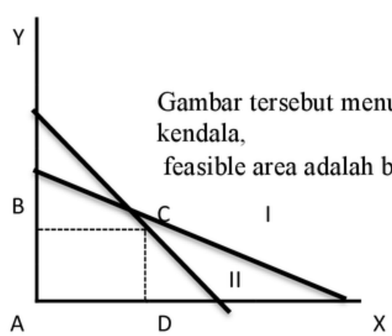
Kegunaan programasi linear dalam persoalan ekonomi sering tertuju pada penggunaan sumber-sumber produksi yang terbatas secara maksimal. Artinya dengan sumber-sumber produksi terbatas tersebut dapat berkombinasikan sedemikian rupa sehingga diperoleh hasil yang optimal.

Optimalisasi dapat dicari dengan metode grafis dan metode simpleks. Optimalisasi dengan metode grafis hanya dapat digunakan untuk variabel yang lebih dari dua dapat digunakan metode simpleks.

2. Metode Grafis

a. Langkah-langakah penggunaan metode grafik
   1. Tentukan fungsi tujuan di dalam fungsi linear .
   2. Tentukan semua kendala dan wujudnya dalam persamaan atau pertidaksamaan .
   3. Menggambarkan semua kendala fungsi linear didalam grafik sistem koordinat
   4. Carilah feasible areaa .
   5. Tentukan aktivitas yang dapat mengoptimalisasikan fungsi tujuan dari feasible area .

b. Bentuk Grafik



Gambar tersebut menunjukkan ada dua kendala,
feasible area adalah bidang yang terasir yaitu (ABCD)

Contoh Soal

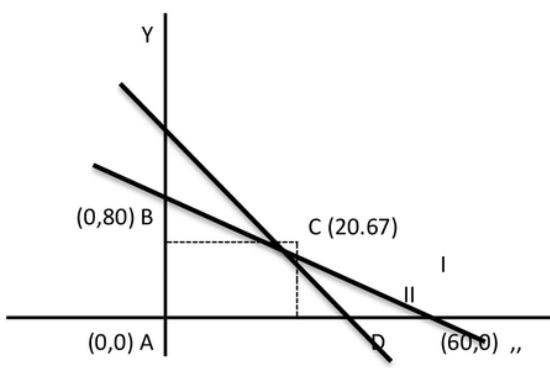
1. Perusahaan tegal memproduksi dua jenis tegal yaitu tegal X dan Y . Untuk membuat satu unit produk X dibutuhkan 2 unit bahan I dan 5 unit bahan II. Sedangkan untuk memproduksi satu unit produk Y, diperlukan 3 unit bahan I dan III unit bahan II. Bahan II tersedia 300 unit. Keuntungan yang diperoleh dari penjualan produk X = Rp. 100 / unit dan produk Y = Rp 200 per unit. Dengan kondisi diatas berapa keuntungan maksimal yang dapat diperoleh ?

Penyelesaian :

1. Fungsi tujuan : $Z = 100\ X + 200\ Y$
   Fungsi kendala :
   Bahan I ------$2X + 3Y \leq 240$ $X,Y \geq 0$
   Bahan II ------$5X + 3Y \leq 300$

   Persamaan kendala menjadi :
   $2X + 3Y = 240$ $X,Y \geq 0$
   $5X + 3Y = 300$

2. Gambar Grafik



II $5X + 3Y = 300$
I $2X + 3Y = 240$ (-)
$3X = 60$
$X = 20$
I $2X + 3Y = 240$
$40 + 3Y = 240$
$3Y = 200$
$Y = 67$

3. Feasibel area dalam ABCD daerah yang diarsir .
4. Mencari optimal fungsi tujuan :

- Titik A (0 , 0) --- $Z = 100\ (0) + 200\ (0) = 0$
- Titik B (0 , 80) --- $Z = 100\ (0) + 200\ (80) = 16.000$
- Titik C (2 0 , 67) --- $Z = 100\ (20) + 200\ (67) = 15.400$
- Titik D (60 , 0) --- $Z = 100\ (60) + 200\ (0) = 6.000$

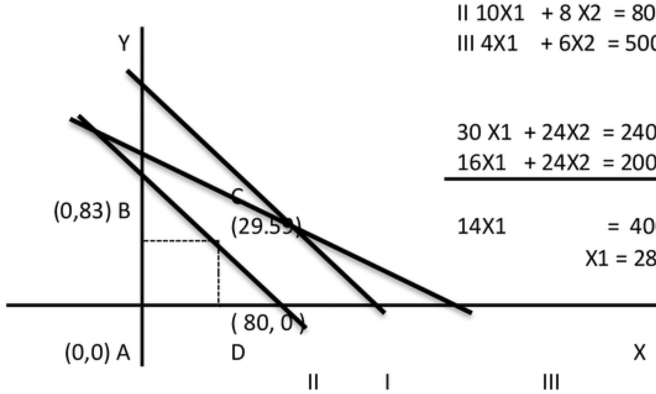
Dari hasil perhitungan diatas , terlihat nilai keuntungan terbesar pada aktivitas di titik B yang menghasilkan keuntungan sebesar Rp 16.000; , dengan memproduksi produk X = 0 dan produk Y = 80 unit.

2. Suatu perusahaan memproduksi barang X1 dan X2 dengan keuntungan yang diharapkan X1 200 dan X2 150. Untuk memproduksi X1 harus melalui mesin I 5 menit , mesin II 10 menit dan mesin III 4 menit. Sedangkan untuk memproduksi X2 melalui mesin I 4 menit, mesin II 8 menit dan mesin III 6 menit. Kapasitas maksimum mesin I = 60 menit / minggu
II = 800 menit / minggu
III = 500 menit / minggu

Penyelesaian :

1. Fungsi tujuan : Z = 200 X1 + 500 X2
   Fungsi kendala :
   Mesin I = $5X1 + 4X2 \leq 600$ --- $5X1 + 4x2 = 600$
   II = $10X1 + 8X2 \leq 800$ --- $10X1 + 8x2 = 800$
   III = $4X1 + 6X2 \leq 500$ --- $4X1 + 6x2 = 500$

2. Gambar Grafik



II 10X1 + 8 X2 = 800 X 3
III 4X1 + 6X2 = 500 X 3

30 X1 + 24X2 = 2400
16X1 + 24X2 = 2000 (-)

14X1 = 400
X1 = 28,6 atau 29
4 (29) + 6 (X2) = 500
6X2 = 356
X2 = 59

3. Daerah feasibel adalah ABCD daerah yang diarsir.
4. Mencari optimal fungsi tujuan :
   a. Titik A (0 , 0) --- Z = 200 (0) + 150 (0) = 0
   b. Titik B (0 ,10 0) --- Z = 200 (0) + 150 (83) = 12450
   c. Titik C (29 , 59) --- Z = 200 (29) + 150 (59) = 14609
   d. Titik D (80 , 0) --- Z = 200 (80) + 150 (0) = 16.000

   Dengan melihat perhitungan tersebut menunjukkan bahwa aktivitas yang paling menguntungkan adalah peta titik D dengan memproduksi X1 = 80 unit dan tidak memproduksi X2 atau X2 = 0 , total keuntungan Rp 16.000; .
3. Perusahaan cewek indah memproduksi 2 macam barang yaitu barang X dan barang Y

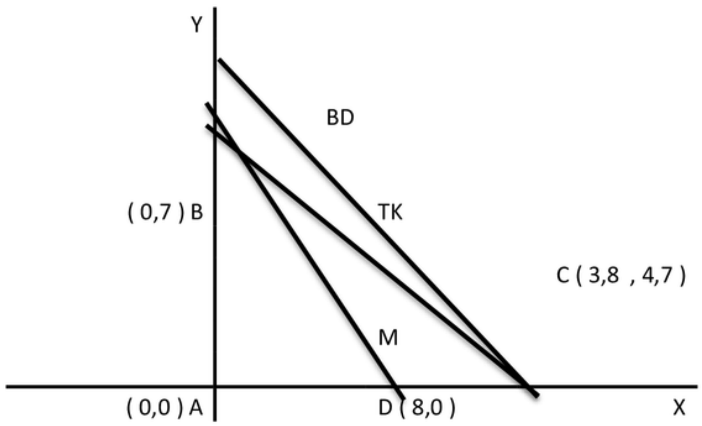
Keterangan	Produk X	Produk Y
Keuntungan per unit	Rp 200	Rp 300
Pemakaian bahan	12 unit	6 unit
Pemakaian tenaga kerja	7 jam	10 jam
Pemakaian modal	Rp 10.000	Rp 10.000

Maksimum modal adalah Rp 100.000
Maksimum tenaga kerja 70 jam
Maksimum bahan adalah 72 unit
Tentukan Kombinasi yang paling menguntungkan !

Penyelesain

a. Fungsi tujuan : Z = 200 X + 300 Y
   Fungsi kendala :
   - Bahan dasar --- 12 X + 6 Y
   - Tenaga kerja --- 7 X + 10 Y = 100.000

b. Bentuk gambar grafik



c. Daerah yang feasibel adalah ABCD yang diarsir.
d. Mencari optimal fungsi tujuan :
   - Titik A (0 , 0) --- Z = 200 (0) + 300 (0) = 0
   - Titik B (0, 7) --- Z = 200 (0) + 300 (7) = 2.100
   - Titik C (3, 8 , 4, 7) --- Z = 200 (3,8) + 300 (4,7) = 4.060
   - Titik D (6 , 0) --- Z = 200 (6) + 300 (0) = 1.200

3. Metode Simpleks

Metode simpleks dikerjakan secara sistematik bermula dari pemecahan dasar yang laik atau feasibel ke pemecahan dasar yang laik lainnya. Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga akhirnya ditemukan satu pemecahan dasar yang optimal.
Dalam pencarian nilai optimal ini peranan matriks berikut kaidah-kaidahnya sangat berarti.

Langkah-langkah penyelesaian

a. Menentukan fungsi tujuan
b. Membuat matrik.
c. Menentukan kolom kunci yaitu dengan memilih angka cj-zj yang positif terbesar.
d. Menentukan baris kunci dengan memilih angka r yang terkecil positif. Angka r ini diperoleh dengan membagi angka pada kolom kuantitas dengan angka-angka pada kolom kunci.
e. Menentukan angka kunci, yaitu angka yang terletak pada Perpotongan antara baris kunci dan kolom kunci.
f. Membuat matrik baru dengan lebih dahulu menentukan baris utama yaitu, angka-angka pada baris kunci dibagi dengan angka kunci.
g. Menentukan angka-angka pada baris yang lain dengan rumus:

$$\text{Angka baru} = \frac{A1 - (Abk)\,(Akk)}{AK}$$

h. Penyelesaian akan optimal jika angka-angka pada baris Cj-Zj sudah tidak ada yang positif atau =0.

Contoh Soal

Suatu perusahaan memproduksi barang X1, X2 dan X3. Keuntungan yang diharapkan X1=10, X2=15 dan X3=20 , semuanya per unit. Untuk memproduksi 1 unit X1 diperlukan waktu 10,7 menit mesin I , 5,4 menit mesin II dan 0,7 menit mesin III. Untuk memproduksi X2 5 menit mesin I, 10 menit mesin II dan 1 menit mesin III. Untuk memproduksi X3, 2 menit mesin I , 4 menit mesin II dan 2 menit mesin III. Kapasitas maksimum mesin : I = 2.705 m II = 2.210 III = 445 menit

Tentukan kombinasi yang paling menguntungkan untuk memproduksi produk tersebut !

Penyelesaian :

a. Fungsi tujuan : Z = 10X1 + 15X2 + 20X3
b. Matrik pertama :

Program Profit		Cj	10	15	20	0	0	0	r
		Q	X1	X2	X3	S1	S2	S3	
S1	0	2,705	10,7	5	2	1	0	0	1,352,5
S2	0	2,21	5,4	10	4	0	1	0	552,5
S3	0	445	0,7	1	2	0	0	1	222,5
		Cj	0	0	0	0	0	0	
		Cj-Zj	10	15	20	0	0	0	

Matrik pertama ini dibuat berdasarkan data dalam soal. setelah matrik pertama tersusun, selanjutnya menyusun matrik yang ke dua berdasarkan matrik pertama tersebut.

c. Matrik ke dua :

Program Profit		Cj	10	15	20	0	0	0	r
		Q	X1	X2	X3	S1	S2	S3	
S1	0	2,260	10	4	0	1	0	-1	665
S2	0	1,320	4	8	0	0	1	-2	165
S3	20	222,5	0,35	0,5	1	0	0	0,5	445
		Cj	7	10	20	0	0	10	
		Cj-Zj	3	5	0	0	0	-10	

Pengisian matrik kedua ini dilakukan dengan perhitungan sebagai berikut :

1. Mengganti angka pada baris kunci dengan angka baru

445 : 2 = 222,5
0, 7 : 2 = 0,35
1 : 2 = 0,5
2 : 2 = 1
0 : 2 = 0
0 : 2 = 0
1 : 2 = 0,5

2. Mengganti baris S1 dengan angka baru dengan FR=2/2=1

2.260 - (445X1) = 2260
10,7 - (0,7X1) = 10
5 - (1X1) = 4
2 - (2X1) = 0
1 - (0X1)= 1
0 - (0X1) = 0
0 - (1X1)= -1

3 Mengganti baris S2 dengan angka baru dengan FR = 4/2=2

2.210 - (445 x 2) = 1.320
5,4 - (0,7 x 2) = 4
10 - (1 x 2) = 8
4 - (1 x2) = 0
0 - (0 x2) = 0
1 - (0 x2)= 1
0 - (1 x2)= -2

4. Mengganti angka r dengan angka yang baru

S1 - - - 2.660 : 4 = 665
S2 - - - 1.320 : 8 = 165
S3 - - - 222,5 : 0,5 = 445

d. Matrik ke tiga

Program Profit		Cj	10	15	20	0	0	0	r
		Q	X1	X2	X3	S1	S2	S3	
S1	0	1600	8	0	0	1	-0,5	0	200
S2	15	165	0,5	1	0	0	0,125	-0,25	330
S3	20	140	0,1	1	1	0	-0,063	-0,38	1400
		Cj	9,5	15	20	0	0,625	11,25	
		Cj-Zj	0,5	0	0	0	-0,625	-11,25	

Pengisian matrik ke tiga ini dilakukan dengan perhitungan sebagai berikut :

1. Mengganti angka pada baris kunci dengan angka baru
   1.320 : 8 = 165
   4 : 8 = 0,5
   8 : 8 = 1
   0 : 8 = 0
   0 : 8 = 0
   1 : 8 = 0,125
   -2 : 8 = 0,25
2. Mengganti baris S1 dengan angka baru dengan FR= 4/8 = 0,5
   2.260 - (1.320 x 0,5) = 1600
   10 - (4 x 0,5) = 8
   4 - (8 x 0,5) = 0
   0 - (0 x 0,5) = 0
   1 - (0 x 0,5) = 1
   0 - (1 x 0,5) = -0,5
   -1 - (-2 x 0,5) = 0
3 Mengganti baris X3 dengan angka baru dengan FR=0,5/8=0,063
   222,5 - (1.320 x 0,063) = 140
   0,35 - (4 x 0,063) = 0,1
   0,5 - (8 x 0,063) = 0
   1 - (0 x 0,063) = 1
   0 - (0 x 0,063) = 0
   0 - (1 x 0,063) = -0,063
   0,5 - (-2 x 0,063) = 0,375
4. Mengganti kolom r dengan angka yang baru
   S1 - - - 1.600 : 8 = 200
   S2 - - - 165 : 0,5= 330
   X3 - - - 140 : 0,1= 1400

e. Matrik ke empat

Program	Profit	Cj	10	15	20	0	0	0
		Q	X1	X2	X3	S1	S2	S3
S1	0	200	1	0	0	0,125	-0,063	0
S2	15	65	0	1	0	-0,063	-0,156	0,25
S3	20	120	0	1	1	-0,013	0,57	0,375
		Cj	10	15	20			
		Cj-Zj	0	0	0			

Dengan melihat matrik ke empat tersebut diatas menunjukkan bahwa Cj – Zj sudah nol semua, hal ini menunjukkan bahwa penyelesaian permasalahan penentuan kombinasi produksi yang paling menguntungkan telah optimal. Kombinasi tersebut dengan memproduksi produk X1 = 200 unit, X2 = 65 unit dan X3=120 unit. Adapun total keuntungan dari kombinasi tersebut adalah
sebagai berikut :

z = 10 X 1 + 15 X 2 + 20 X 3
z = 10 (200) + 15 (65) + 20 (120)
z = 2.000 + 975 +2.400
z = 5.375
=====

Soal Latihan

1. Perusahaan BE memproduksi barang X1 dan X2 dengan keuntungan yang diharapkan X1=500 , X2=1100. Untuk memproduksi X1 harus melalui mesin I 5 menit, mesin II 10 menit dan mesin III 4 menit. Sedangkan untuk memproduksi X2 melalui mesin I 4 menit, mesin II 8 menit dan mesin III 6 menit .
   Kapasitas mesin : I = 1200 menit
   II = 1600 menit
   III = 1000 menit
   Diminta : tentukan kombinasi produksi yang menghasilkan laba/keuntungan yang paling besar/ (kombinasi yang optimal).

2. Perusahaan ABG memproduksi dua macam produk yaitu X dan Y.
   Keuntungan yang diharapkan X = 600 dan Y = 300 per unit.
   Kapasitas mesin apabila digunakan akan menghasilkan produk
   X = 4.000 unit dan Y = 6.000 setiap harinya. Setiap jam dapat menghasilkan 500 unit produk X dan 750 produk Y. Bahan baku untuk memproduksi produk X hanya cukup untuk memproduksi 3.000 unit produk X setiap harinya , sedangkan untuk bahan baku untuk produk Y tidak menjadi kendala, karena mencukupi segala kebutuhan . bagian pengepakan hanya mampu mengepak 5000 unit barang X dan Y. Berapa unit barang X dan Y masing-masing harus diproduksi agar dicapai keuntungan yang maksimal ?

3. Perusahaan EBU memproduksi dua macam produk yaitu produk X dan Y. Untuk memproduksi satu unit produk X harus melalui Mesin I 2 jam, dan mesin II 5 jam. Sedangkan untuk membuat satu unit produk Y harus melalui mesin I 4 jam dan mesin II 2 jam. Kapasitas mesin I= 400 jam dan mesin II=600 jam.kebutuhan bahan dasar yang

tersedia bagi perusahaan 11.250 kg. Permintaan untuk produk x pada periode itu hanya 140 unit dan produk Y = 70 unit.

Harga jual dan biaya produksinya sebagai berikut :

Produk	harga jual	biaya produksi
X	Rp. 23.000	Rp. 18.000
Y	Rp. 28.000	Rp. 16.340

Tentukan kombinasi produksi yang menghasilkan keuntungan yang terbesar ?

4. Perusahaan EX membuat barang X dan Y, dengan keuntungan per unit yang diharapkan X = 5.000 dan Y 7000. Untuk membuat satu unit barang X memerlukan 4 unit bahan A dan 3 unit bahan B. Sedangkan untuk membuat 1 unit barang Y memerlukan 2 unit bahan A dan 4 unit bahan B. Persediaan bahan diperusahaan 100 unit bahan A dan 120 unit bahan B. Tentukan kombinasi produksi yang paling menguntungkan.

5. Perusahaan pintu naga memproduksi dua macam barang X dan Y data perusahaan sebagai berikut :

Ket.	Mesin I	mesin II	mesin III	keuntungan/unit
X	2 menit	8 menit	10 menit	Rp 400
Y	5 menit	4 menit	....	Rp 300
Kapasitas	800 menit	800 menit	800 menit	....

Dari data tersebut diatas tentukan, produksi yang menghasilkan keuntungan terbesar ?

6. Perusahaan Tutur Tinular membuat barang a dan b. Data perusahaan adalah sebagai berikut:

Keterangan	X	Y
Keuntungan/unit	Rp 400	Rp 600
Pemakaian bahan	12 unit	6 unit
Pemakaian tenaga kerja	7 jam	10 jam
Pemakaian modal	Rp 10.000	Rp 10.000

Maksimum modal yang tersedia Rp 800.000
Maksimum tenaga kerja 700 jam
Maksimum bahan baku yang tersedia adalah 720 unit.
Diminta : tentukan kombinasi produksi yang paling menguntungkan !

7. Perusahaan mak lampir membuat barang X dan Y untuk membuat satu unit produk X memerlukan 4 kg bahan baku, 12,5 jam mesin 1 dan 7 jam mesin II. Sedangkan produk Y setiap unit memerlukan 6 kg bahan baku, 7 jam mesin I dan 8 jam mesin II. Permintaan produk X tahun itu akan mencapai 90 unit dan produk Y 60 unit. Maksimum bahan baku yang tersedia diperusahaan 480 kg. Kapasitas mesin I = 1.120 jam dan mesin II = 980 jam/tahun. Harga jual per unit produk X = 155.000 dan produk Y = 187.000. sedangkan harga pokoknya X = 123.000 dan Y = 155.000 per unit.
   Diminta : tentukan kmbinasi produksi yang paling menguntungkan untuk memproduksi barang tersebut !

8. Suatu perusahaan memproduksi barang A,B, dan C. Dengan keuntungan yang diharapkan. A = 100, B = 150, dan C =200,semuanya per unit. Untuk memproduksi satu unit produk A diperlukan waktu 10,7 mesin I, 5,4 mesin II dan 0,7 mesin III. Untuk memproduksi satu unit

produk B diperlukan waktu 5 menit mesin I, 10 menit mesin II, dan i menit mesin III. Sedangkan untuk memproduksi satu unit produk C diperlukan waktu 2 menit mesin I, 4 menit mesin II dan 2 menit mesin III. Adapun kapasitas mesin adalah sebagai berikut :

Mesin I = 27.050 menit
Mesin II = 22.100 menit
Mesin III = 4.450 menit

Dari data tersebut tentukan kombinasi produksi yang menghasilkan keuntungan maksimal ?

9.. Perusahaan Tersayang memproduksi barang X, Y Dan Z. Data lamanya proses tiap-tiap mesin adalah sebagai berikut :

Keterangan	Produk X	Y	Z	Kapasitas
Laba/unit	Rp 8	Rp 9	Rp 15	
Mesin I	21,4 menit	10 menit	4 menit	5,410 menit
Mesin II	10,8 menit	20 menit	8 menit	4,420 menit
Mesin III	1,4 menit	2 menit	4 menit	890 menit

Dari data tersebut tentukan kombinasi produksi yang paling menguntungkan ?

10. Perusahaan Tersanjung memproduksi barang X dan Y. Data Perusahaan adalah sebagai berikut :

Keterangan	Produk X	Y	Kapasitas
Mesin I	5 menit	3 menit	300 menit
Mesin II	0 menit	1 menit	60 menit
Mesin III	4 menit	5 menit	400 menit
Keuntungan	Rp 500/unit	Rp 1000/unit	-

Dari data tersebut tentukan aktivitas yang memberikan keuntungan maksimum ?

11. Perusahaan Kipas-kipas asmara memproduksi dua mascam produk X dan Y. Data perusahaan sebqagai berikut :

Produk	Mesin I	Mesin II	Mesin III	Laba/unit
X	10 menit	8 menit	6 menit	Rp 1000
Y	3 menit	6 menit	10 menit	Rp 2000
Kap.	300 menit	480 menit	600 menit	-

Dari data tersebut tentukan tingkat aktivitas yang menghasil-kan keuntungan yang paling besar !

BAB VII
ANALISIS INPUT-OUTPUT

1. Pengertian

Analisis inut-output merupakan suatu model matematis untuk menelaah struktur perekonomian yang saling kait mengait antar berbagai sektor atau kegiatan ekonomi. Model ini lazim diterapkan untuk menganalisis perekonomian secara makro , national ataupun regional

Analisis Input-output bertolak dari anggapan bahwa suatu sistem perekonomian terdiri dari sektor-sektor yang saling berkaitan. Masing-masing sektor menggunakan output dari sektor lain sebagai input bagi output yang akan di hasilkannya kemudian output yang di hasilkan akan menjadi input bagi sektor yang lain. Sudah barang tertentu,selain menjadi input bagi sektor lain terdapat pula output dari suatu sektor yang menjadi input bagi sektor itu sendiri dan sebagai barang konsumsi bagi pemakai ahir.

2. Langkah-langkah

a. Menyusun Matrik Transaksi

Matrik transaksi merupakan suatu tabel yang berisi keterangan - keterangan tentang bagaimana, baik dalam satuan kuantitatif fisik atau dalam satuan nilai uang, output suatu sektor terdistribusi ke sektor-sektor lain sebagai input dan ke pemakai ahir sebagai barang konsumsi.

Contoh : Matriks Trnsaksi Perekonomian Suatu Negara

	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan akhir	output total
Pertanian	200	350	50	400	1000
Industri	150	800	600	1350	2900
Jasa	100	500	550	1200	2350
Nilai tambah	550	2250	1150	700	3650
Output tambahan	1000	2900	2350	2650	9900

Tabel kesamping menjelaskan bahwa dari seluruh output sektor pertanian senilai 1000, senilai 200 digunakan sektor itu sendiri sebagai input , senilai 350 digunakan sektor indrustri sebagai input, senilai 50 digunakan sebagai input sektor jasa, dan sisanya senilai 400 dibeli oleh konsumen ahir sebagai barang konsumsi. Tabek kebawah menjelaskan bahwa dari seluruh output sektor pertanian senilai 1000,senilai 200 berupa input dari sektor itu sendiri, senilai 150 berupa input dari sektor indrustri, merupakan nilai tambah sektor pertanian tersebut, yaitu merupakan nilai tambahan sektor pertanian tersebut,yaitu senilai 550. Nilai tambahan disebut juga input primer

b. Menyusun Matrik Teknologi

Dari Matrik Transaksi dapat di ketahui, bahwa bagi sektor j untuk memproduksi output sejumlah Xj diperlukan input-inputn dari sektor 1 hingga rektor m dan jumlah tertentu nilai tambahan atau input primer, hal ini berati bahwa masing-masing kolom menggambarkan hubungan input-output antar sektor. Begitu pula pada saat yang sama matriks transaksi memberikan informasi tentang bagaimana output dari sesuatu sektor terdistribusi tentang sektor-sektor yang ada, termasuk sektor konsumen akhir. Hal inipun menggambarkan hubungan input output antar sektor. Jika nilai masing –masing unsur dalam matriks nilai jumlah kolom yang besangkutan, maka diperoleh suatu rasio yang dinamakan koefesien input.

$$\text{Koefesien input : } a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

Dimana i = 1, 2, ... m
j = 1, 2, ... m

Koefesien input aij adalah suatu resiko yang menjelaskan jumlah output sektor i yang di perlukan sebagai input untuk menghasilkan suatu unit output disektor j.

Jika seluruh koefesien input aij dihitung (untu semua i dan j) dan hasi-hasilnya disajikan dalam suatu matrik, diperoleh sebuah matrik teknologi. Jadi matriks teknologi adalah suatu matriks dalam analisis input-output yang unsur-unsurnya berupa koefesien input secara teknis. Sebagai ilustrasi, matriks teknologi untuk perekonomian suatu negara tersebut diatas adalah :

	P	I	J
Pertanian	0,20	0,12	0,02
Indrustri	0,15	0,28	0,26
Jasa	0,10	0,17	0,23
Nilai tambahan	0,55	0,43	0,49
	1,00	1,00	1,00

C. Contoh soal

Hubungan input output antar sektor dalam perekonomian sebuah negara seperti ditunjukan oleh tabel transaksi sbb :

	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan akhir	Output total
Pertanian	20	35	40	40	100
industri	15	80	60	135	290
jasa	10	50	55	120	235
Nilai tambah	55	125	115	70	365
Output total	100	290	235	365	990

A. Hitunglah masing-masing koefesien inputnya.
B. Jika permintaan ahir terhadap sektor pertanian, sektor inustri dan sektor jasa diharapkan masing-masing berubah menjadi 100, 300 dan 200, berapa output total yang baru bagi masing-masing sektor tersebut.
C. Hitunglah nilai tambah yang baru bagi masing-masing sektor.

Penyelesaian :

a. Koefesien input

$$
\begin{array}{l} \\ \text{Pertanian} \\ \text{Industri} \\ \text{Jasa} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{P} & \text{I} & \text{J} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}12 & 0{,}02 \\ 0{,}15 & 0{,}28 & 0{,}26 \\ 0{,}10 & 0{,}17 & 0{,}23 \end{pmatrix} \end{array} = A
$$

b. output total masing-masing sektor

Menurut rumus $X = (I - A)^{-1} U$

$$
\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0{,}12 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 1-0{,}28 & 1-0{,}23 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 1-0{,}23 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0{,}80 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & ,72 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 0{,}77 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}
$$

Determinan $I - A = (0{,}80)\,(0{,}72)\,(0{,}77) + (-0{,}12)\,(-0{,}26)\,(-0{,}10)$
$+ (-0{,}02)\,(0{,}17)\,(-0{,}15) - (-0{,}10)\,(0{,}72)$
$(-0{,}02) - (-0{,}15)\,(-0{,}12)\,(-0{,}77) - (0{,}80)$
$(-0{,}260)\,(-0{,}17) = 0{,}38923$

$$
(I - A)^{-1} = \frac{\underline{adj(I - A)}}{I - A}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0{,}80 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 0{,}72 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 0{,}77 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5102 & 0{,}0958 & 0{,}0456 \\ 0{,}1415 & 0{,}6140 & 0{,}2110 \\ 0{,}0975 & 0{,}1480 & 0{,}5580 \end{pmatrix} \; 0{,}38923
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1{,}3108 & 0{,}2461 & 0{,}1171 \\ 0{,}3635 & 1{,}5775 & 0{,}5421 \\ 0{,}2505 & 0{,}3802 & 1{,}4336 \end{pmatrix}
$$

Dengan demikian :

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3108 & 0{,}2461 & 0{,}1171 \\ 0{,}3635 & 1{,}5775 & 0{,}5421 \\ 0{,}2505 & 0{,}3802 & 1{,}4336 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 228{,}33 \\ 618{,}02 \\ 425{,}83 \end{matrix}$$

Jadi output total masing-masing sektor akan menjadi

Pertanian = 228,33 industri = 618,02 jasa = 425,83

c..Nilai Tambahan Sektor

Pertanian = 0,55 X 228,33 = 125,58
Industri = 0,43 X 618,02 = 265,75
Jasa = 0,49 X 425,83 = 208,66

Setelah diketahui output total masing-masing sektor dapat disusun matriks transaksi yang baru sebagai berikut :

	pertanian	Industri jasa	Permintaan ahir	Output total
Peraturan	45,47	74,16 8,51	100	228,33
Industri	34,25	173,05 110,72	300	618,02
Jasa	22,38	105,75 97,94	200	425,83
Nilai tambahan	125,58	265,75 208,66		
Output total	228,33	618,02 425,38		

Soal latihan

1. Hubungan input-output antar sektor dalam perekonomian sebuah negara diketahui seperti ditunjukan oleh tabel transaksi di bawah ini

	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan ahir	Output total
Pertanian	11	19	1	10	41
Industri	5	89	40	106	240
Jasa	5	37	37	106	185
Nilai tambah	20	95	107	21	234
Output total	41	240	185	234	659

a. Hitunglah masing-masing koefesien inputnya
b. Jika permintaan ahir terhadap sektor pertanian. Sektor industri dan sektor jasa diharapkan masing-masing berubah menjadi 25, 201, dan 45, berapa output total yang baru bagi masing-masing sektor.
c. Hitunglah nilai tambah yang baru bagi masing-masing sektor dan susun matriks transaksi yang baru.

2. Dengan data sama seperti soal nomor 1 di atas hitunglah output total per sektor dan susun matrik transaksi yang baru jika permintaan akhir berubah menjadi 30 untuk pertanian, 150 untuk industri dan 125 untuk sektor jasa.

3. Hubungan input-output antar sektor dalam suatu perekonomian ditunjukan oleh tabel berikut

	Sektor A	sektor B	sektor C	permintaan akhir
Sektor A	80	100	100	40
Sektor B	80	200	60	60
Sektor C	80	100	100	20

a. Hitunglah masing-masing koefesien inputnya.
b. Berapa output total persektor bila permintaan akhir terhadap setiap sektor diharapkan merata menjadi sama-sama 60?
c. Susunlah matriks transaksi yang baru

4. Dengan data pada soal no 3 di atas, bila permintaan ahir berubah menjadi 120 (sektor A) , 40 (sektor B) dan 10 (sektor C) berapa kenaikan atau penurutan output total masing-masing sektor dan susunlah matrik transaksi yang baru

5. Dengan menggunakan data contoh soal di atas, bila permintaan ahir berubah menjdi 200 (sektor pertanian), 400 (sektor industri) dan 300 (sektor jasa), berapa output total yang baru masing-masing sektor dan susunlah matrik transaksi yang baru

6. Dengan menggunakan data soal nomor 1 di atas, bila permintaan akhir berubah tiap sektor diharapkan menjadi sama yaitu 200, berapa output total yang baru masing-masing sektor dan susunlah matrik transaksi yang baru.

Matematika Ekonomi

ORIGINALITY REPORT

15%	16%	0%	11%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	yudisangmorningstar.blogspot.com Internet Source	2%
2	id.scribd.com Internet Source	2%
3	malif212.blogspot.com Internet Source	2%
4	windilisnawati.blogspot.com Internet Source	1%
5	muhamadsaropi.blogspot.com Internet Source	1%
6	es.scribd.com Internet Source	1%
7	fadhilasildano.blogspot.com Internet Source	1%
8	digilib.uin-suka.ac.id Internet Source	1%
9	mzm26.blogspot.com Internet Source	1%

10	diniiarr.blogspot.com Internet Source	1%
11	pt.slideshare.net Internet Source	1%
12	ekonomi.unwiku.ac.id Internet Source	1%
13	soalujianterbaru.blogspot.com Internet Source	1%
14	www.slideshare.net Internet Source	1%
15	ma-dasar.lab.gunadarma.ac.id Internet Source	1%
16	vdocuments.site Internet Source	1%
17	tantoapaajadech.blogspot.com Internet Source	<1%

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 100 words
Exclude bibliography	On		